## РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

**Задача 4.1.** Пресметнете стойността на числовия израз:

$$A=\left(27846:9+3801:7\right)-36\cdot 101.$$

Възможно ли е точно едно от участващите в израза $A$ числа да се замени с друго така, че първоначалната стойност на израза да се увеличи с 5?

*Решение*: $A=\left(27846:9+3801:7\right)-36\cdot 101=\left(3094+543\right)-3636=3637-3636=1$.

Желаната замяна е възможна по един от следните два начина: или 27846 да се замени с 27891, или 3801 да се замени с 3836.

<u>*Схема на оценяване*</u>: Правилното извършване на деленията и умножението – по **1 т.**, общо **3 т.** За пресмятането на числовата стойност на израза – още **1 т.** За правилен отговор на въпроса в задачата (без обосновка) – **1 т.** и още **2 т.**, ако е показано как да стане промяната на стойността на израза (достатъчно е посочване на един начин).

**Задача 4.2.** Дължината и широчината на правоъгълник, измерени в сантиметри, са естествени числа. Обиколката на правоъгълника в сантиметри е двуцифрено число с цифра на единиците 0, а лицето на правоъгълника в квадратни сантиметри е двуцифрено число с цифра на десетиците 9.

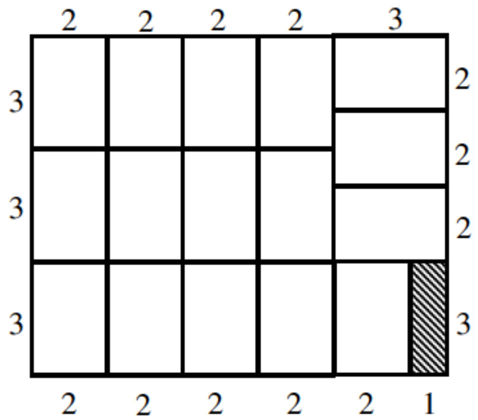
а) Да се намерят всички такива правоъгълници.

б) Лицето на правоъгълника е 99 *кв. см*. Колко най-много правоъгълника с размери 3 *см* и 2 *см* могат да бъдат разположени в дадения правоъгълник без застъпване и припокриване?

*Решение*: а) Можем да предполагаме, че широчината на търсените правоъгълници е не по-голяма от дължината. Да разгедаме правоъгълник с исканите свойства. Ако широчината на правоъгълника е по-голяма от 9 *см*, то лицето му ще е поне $10\cdot 10=100$ *кв. см*, което е невъзможно. Следователно широчината на правоъгълника е едноцифрено число. Тя не може да 1 *см*, защото тогава дължината трябва да е поне 90 *см* (заради лицето), но в такъв случай обиколката не може да е двуцифрено число. По същия начин проверяваме, че широчината не може да е 2 *см* – тогава дължината трябва да е поне 45 *см,* но обиколката става по-голяма от 90 *см* и няма как да е двуцифрено число, завършващо на 0. Ако дължината на правоъгълника е $a$ *см,* а широчината му е $b$ *см*, то за да завършва обиколката $P=2\cdot\left(a+b\right)$ на нула, трябва сборът $a+b$ да завършва на 5 или на 0. Ако широчината на правоъгълника е 3 *см*, то понеже $3\cdot 30=90$ и $3\cdot 33=99$, дължината му може да бъде 30, 31, 32 или 33 *см*. Но само дължина 32 *см* е такава, че $3+32=35$ завършва на 5. Така намираме един правоъгълник, който е решение на задачата. Той е с дължина 32 *см*, широчина 3 *см*, обиколка 70 *см* и лице 96 *кв. см*. По същия начин проверяваме останалите възможности за широчината на правоъгълника. Окончателно получаваме следните правоъгълници, които са решения на задачата:

| Дължина | Широчина | Обиколка | Лице |
|---|---|---|---|
| 32 | 3 | 70 | 96 |
| 13 | 7 | 40 | 91 |
| 12 | 8 | 40 | 96 |
| 11 | 9 | 40 | 99 |

б) Като използваме намереното в а), виждаме, че става въпрос за правоъгълника с дължина 11 *см* и широчина 9 *см*. Да отбележим, че измеренията на този правоъгълник могат да бъдат намерени и без да се използват резултатите от а). Понеже лицето на един "малък" правоъгълник е $3 \cdot 2 = 6$ *кв. см* и $17 \cdot 6 = 102 > 99$, то в дадения правоъгълник не могат да бъдат разположени повече от 16 "малки" правоъгълника. Ето пример на вариант за разположение на 16 "малки" правоъгълника:




Защрихованият правоъгълник остава непокрит.

*<u>Схема на оценяване</u>*: За а) – общо **4 т.**, по **1 т.** за всеки открит правоъгълник. Ако правоъгълниците са само посочени, без никаква обосновка, да се присъждат **2 т.** За б) – общо **3 т.**, от които **1 т.** за намиране броя на правоъгълниците и **2 т.**, ако е построен коректен пример на разположение на правоъгълниците.

**Задача 4.3.** Да се реши числовият ребус $abcd \cdot a = eeeed$, в който на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви отговарят различни цифри.

*Решение*: Цифрата $a$ не може да бъде равна на 0, защото е първа цифра. Тя не може да е 1, защото тогава произведението $abcd \cdot a$ няма да бъде петцифрено. Да разгледаме последователно останалите възможности за цифрата $a$. Ако $a = 2$, то произведението $abcd \cdot a$ ще бъде по-малко от $3000 \cdot 2 = 6000$ и няма да е петцифрено. Следователно и този случай е невъзможен. Ако $a = 3$, то произведението $abcd \cdot a$ ще бъде по-малко от $4000 \cdot 3 = 12000$. Затова единствената възможност за цифрата $e$ в този случай е $e = 1$. При това произведението $d \cdot a = d \cdot 3$ трябва да завършва на $d$, което е възможно само ако $d = 0$ или $d = 5$. Проверката показва, че равенството $3705 \cdot 3 = 11115$ е решение на ребуса. Ако $a = 4$, то отново трябва $e = 1$. Но това е невъзможно, защото $eeeed = 1111d$, докато $4000 \cdot 4 = 16000 > 1111d$. Нека $a = 5$. Тъй като $abcd \cdot a$ е число между $5000 \cdot 5 = 25000$ и $6000 \cdot 5 = 30000$, за $e$ получаваме единствената възможност $e = 2$. Тогава $eeeed = 2222d < 25000 = 5000 \cdot 5 < abcd \cdot a$ и отново не получаваме решение. При $a = 6$ произведението $abcd \cdot a$ ще се намира между 36000 и 42000. Затова сега $e = 3$ или $e = 4$. Но ако $e = 3$, то $eeeed = 3333d < 36000$, а ако $e = 4$, то $eeeed = 4444d > 42000$. Следователно и този случай е невъзможен. При $a = 7$ произведението $abcd \cdot a$ ще се намира между $7000 \cdot 7 = 49000$ и $8000 \cdot 7 = 56000$ Затова $e = 4$ или $e = 5$ и понеже отново $eeeed$ ще е $4444d$ или $5555d$, за $e$ остава само възможността $e = 5$. Като отчетем, че трябва $d \cdot a$ да завършва на $d$, заключаваме, че $d = 0$ или $d = 5$. Тъй като вече $e = 5$, остава $d = 0$. Но делението $eeeed : a = 55550 : 7$ е невъзможно. Отново не получаваме решение на ребуса. Нека $a = 8$. Тогава $abcd \cdot a$ ще бъде между $8000 \cdot 8 = 64000$ и $9000 \cdot 8 = 72000$. Следователно $e = 6$ или $e = 7$. Възможността $e = 7$ отпада, защото $7777d > 72000$. Остава $e = 6$. Отново от факта, че $d \cdot a$ трябва да завършва на $d$, определяме $d=0$, при което делението $eeeed:a=66660:8$ е невъзможно. Остана случаят $a=9$. Сега произведението $abcd\cdot a$ се намира между $9000\cdot 9=81000$ и 90000, откъдето $e=8$. Както по-горе, намираме, че $d=0$ или $d=5$. Но деленията $eeeed:a=88880:9$ и $eeeed:a=88885:9$ са невъзможни.

Окончателно ребусът има единствено решение: $3705\cdot 3=11115$.

<u>*Схема на оценяване*</u>: **2 т.**, ако са направени правилни разсъждения за ограничаване стойностите на коя да е от участващите цифри; още **3 т.**, ако са изчерпани всички възможни варианти за стойностите на цифрите (при частично разглеждане на случаите се присъждат **1 т.** или **2 т.** по усмотрение на областната комисия) и още **2 т.** за намиране на решението.

**Задача 5.1.** Да се пресметне стойността на израза:

$$C.C\ +\ C.(C-1)\ +\ C.(C-2)\ +\ C.(C+3),\ \text{където}$$

$C=A-B$, $A=1,23.12,4.125+(1+2+3+4+5+6+7).25$ и $B=123.1,24.12,5+1,25.400.1,2$.

*Решение*:

$A=1,23.12,4.125+(1+2+3+4+5+6+7).25=1,23.12,4.125+28.25=1,23.12,4.125+700$

$B=123.1,24.12,5+1,25.400.1,2=123.1,24.12,5+600$

Произведенията от изразите $A$ и $B$ са равни, т.е. $1,23.12,4.125=123.1,24.12,5$ и следователно $C=A-B=700-600=100$. Тогава

$$C.C\ +\ C.(C-1)\ +\ C.(C-2)\ +\ C.(C+3)=$$

$$=100.100+100.99+100.98+100.103=100(100+99+98+103)=100.400=40\ 000.$$

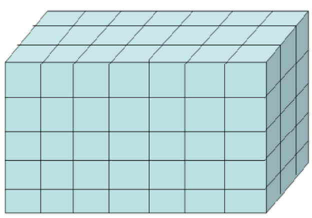
<u>*Схема на оценяване*</u>: За пресмятане на $C=100$ общо **5 т.** и още **2 т.** за завършване на задачата. Разпределението на първите **5 т.** е по **2 т.** за $A$ и $B$, както и **1 т.** за $C=A-B=700-600=100$. Ако се следва описаното решение, **1 т.** за получаване на $A=1,23.12,4.125+700$, **1 т.** за получаване на $B=123.1,24.12,5+600$ и **2 т.** за съображението $1,23.12,4.125=123.1,24.12,5$.

**Задача 5.2.** Правоъгълен паралелепипед е съставен от 105 еднакви кубчета. Ако от всяка стена се извади централното кубче, повърхнината на полученото тяло ще бъде с 384 *кв. см* по-голяма от повърхнината на паралелепипеда. Намерете:

а) дължината на ръба на едно кубче и размерите на паралелепипеда;

б) лицето на повърхнината на правоъгълния паралелепипед;

в) обема на правоъгълния паралелепипед.



*Решение*: а) Да означим с $a$ *см* ръба на едно кубче. Всяко извадено кубче увеличава повърхнината с $4.a.a$ *кв. см*. Тъй като са отнемат 6 кубчета, то повърхнината ще се увеличи с $24.a.a$ *кв. см*. От условието $384=24.a.a$ намираме $a.a=16$ и следователно $a=4$ *см*. Тогава размерите на паралелепипеда са: $7.4=28$ *см*, $3.4=12$ *см* и $5.4=20$ *см*.

б) Лицето на повърхнината на паралелепипеда е равно на

$$2(28.12+28.20+20.12)=2.1136=2272\ \text{кв. см}.$$

в) $V=28.12.20=6720$ *куб. см*.

*Схема на оценяване*: общо **3 т.** за намиране ръба на едно кубче, от които **1 т.** за съображението, че всяко извадено кубче увеличава повърхнината с $4.a.a$ *кв. см* и **1 т.**, че общото увеличение на повърхнината е с $24.a.a$ *кв. см*; **1 т.** за пресмятане на размерите; **2 т.** за б) и **1 т.** за в).

**Задача 5.3.** Да се намери най-голямото естествено число $n$, за което съществува $n-$цифрено число с различни цифри така, че числото да се дели на всяка своя цифра.

*Решение*: Търсеното число не може да съдържа нулата в записа си, защото с нулата не може да се дели. Следователно, за да се дели числото на 5, то трябва да завършва на 5. Но ако числото завършва на 5, със сигурност то не се дели на 2, 4, 6 и 8, откъдето следва, че числото е най-много петцифрено. Затова ще се откажем от петицата и ще покажем, че съществува число с повече цифри, което изпълнява условието на задачата. Сумата на всички цифри без 0 и 5 е равна на $1+2+3+4+6+7+8+9=40$. Броят на тези цифри е 8, но е ясно, че не съществува 8-цифрено число с исканото свойство, защото то със сигурност няма да се дели на 3, на 6 и на 9 (от признаците за делимост на 3 и 9). Заключаваме, че търсеното число е най-много със седем цифри. За да се дели търсеното число на 3 и на 6 (в случай, че си подсигурим да завършва на четна цифра), достатъчно е да се освободим от цифрата 1. Тогава сумата от оставащите цифри става равна на 39 и се дели на 3. Ако се откажем обаче от цифрата 4, вместо от 1, можем да си подсигурим делимост и на 9. За да се дели търсеното число на 8, достатъчно е (съгласно признака за делимост на 8) числото, образувано от последните му три цифри, да се дели на 8. За последни три цифри можем да вземем например 328. Сега лесно стигаме до 7-цифреното число 9 176 328, за което непосредствено се проверява, че се дели на 1, 2, 3, 6, 7, 8 и 9. С това задачата е решена, но ще отбележим, че намереното число не е единственият пример.

*Схема на оценяване*: **1 т.** за отхвърляне на нулата; **1 т.** за разсъждението в случай, че числото се дели на 5; общо **5 т.** за случая, когато числото не се дели на 5, от които **1 т.** за съображението $1+2+3+4+6+7+8+9=40$, **1 т.** за заключението, че търсеното число е най-много със седем цифри, **1 т.** за отхвърляне на цифрата 4 чрез съображенията за делимост на 6, **1 т.** за включване на признака за делимост на 8 и избор на последните три цифри на числото, **1 т.** за верен пример на 7-цифрено число.

**Задача 6.1.** Николай има два кашона с форма на правоъгълен паралелепипед и с размери съответно 1 *м* × 1 *м* × 60 *см* и 80 *см* × 70 *см* × 60 *см*. Колко най-много кутии със същата форма и с размери 20 *см* × 20 *см* × 15 *см* е възможно Николай да постави в кашоните?

*Решение*: Намираме обемите $V_1$, $V_2$ и $V_3$ съответно на първия кашон, втория кашон и кутиите: $V_1=10.10.6=600\ dm^3$, $V_2=8.7.6=336\ dm^3$ и $V_3=2.2.1,5=6\ dm^3$. Като разделим $V_1$ на $V_3$ и $V_2$ на $V_3$, получаваме, че в големия кашон Николай може да постави най-много 100 кутии, а в малкия – най-много 56 кутии.

*Реализация.* В първия кашон поставяме кутиите по следния начин: 20 *см* на ръб 1 *м* и 15 *см* на ръб 60 *см*; така получаваме един пласт от $5.4=20$ кутии и е достатъчно да образуваме пет пласта (това е възможно, защото $100:20=5$). Във втория кашон поставяме кутиите по следния начин: 15 *см* на ръб 70 *см* и 20 *см* на ръб 60 *см*; по този начин на стената 70 *см* × 60 *см* поставяме два реда с по 3 кутии, т.е. общо 6 кутии, които в тази стена заемат правоъгълник с размери 30 *см* × 60 *см*; образуваме общо четири пласта (това е възможно, защото $80:20=4$) и по този начин нареждаме общо 24 кутии, запълвайки паралелепипед с размери 30 *см* × 60 *см* × 80 *см*; в оставащия паралелепипед 40 *см* × 60 *см* × 80 *см* най-напред на ръб 60 *см* поставяме 4 кутии по ръб 15 *см* и в стената 60 *см* × 80 *см* получаваме 4 реда с по 4 кутии (общо 16 кутии); образуваме общо два пласта (това е възможно, защото $40:20=2$), като по този начин нареждаме общо $16.2=32$ кутии.

*Схема на оценяване*: по **1 т.** за намиране на обемите на кашоните и кутията – общо **3 т.**, **1 т.** за оценяване броя на кутиите, които могат да бъдат поставени, **1 т.** за правилно попълване на първия кашон и **2 т.** за правилно попълване на втория; ако са реализирани екстремалните попълвания без намиране на обеми – **7 т.**

**Задача 6.2.** В касичката си Валентин събира само монети. Един ден той решил да преброи паричките в нея. Оказало се, че половината от всички монети плюс една били от 1 лев. Четири десети от останалите и още 4 монети били от 50 стотинки. Десет процента от новия остатък и още 3 монети били от 20 стотинки, а последните 42 монети били от 10 стотинки. Колко са монетите в касичката на Валентин и каква е тяхната стойност в лева?

*Решение*: Ще решим задачата отзад напред. Вторият остатък съдържа монети само от 20 ст. и 10 ст. Ако 3 монети от 20 ст. бяха монети от 10 ст., то монетите от 20 ст. щяха да съставляват 10% от втория остатък. Следователно 90% от втория остатък съдържа $42+3=45$ монети. Оттук намираме, че вторият остатък е 50 монети (90% от $50=45$). Първият остатък съдържа 50 монети от 20 ст. и 10 ст., както и монети от 50 ст. Ако 4 монети от 50 ст. бяха монети от другия вид (20 ст. и 10 ст.), то монетите от 50 ст. щяха да съставляват 0,4 части от първия остатък. Следователно 0,6 части от първия остатък съдържа $50+4=54$ монети. Оттук намираме, че първият остатък е 90 монети ($0,6.90=54$). В касичката има 90 монети от 50 ст., 20 ст. и 10 ст., както и монети от 1 лев. Ако една монета от 1 лев беше монета от другия вид (50 ст., 20 ст. и 10 ст.), то монетите от 1 лев щяха да бъдат половината от всички монети. Следователно половината от всички монети съдържа $90+1=91$ монети. Оттук намираме, че всички монети са $91.2=182$ на брой. Монетите от 1 лев са $\frac{1}{2}\cdot 182+1=92$ и стойността им в лева е 92. Останалите монети са $182-92=90$. Монетите от 50 ст. са $0,4.90+4=40$ и стойността им е 20 лв. Новият остатък монети е $90-40=50$. Монетите от 20 ст. са $0,1.50+3=8$ и стойноста им е 1,60 лв. Стойността на монетите от 10 ст. е $42.0,1=4,20$ лв. За общата стойност на всички монети получаваме:

$$92+20+1,60+4,20=117,80 \text{ лв.}$$

*Схема на оценяване*: **5 т.** за намиране на общия брой 182 на монетите и **2 т.** за намиране на стойността им в лева.

**Задача 6.3.** В таблица $n\times n$ по един от главните диагонали са поставени пионки. На един ход е позволено произволни две пионки да се преместят в съседна горна клетка. Възможно ли е по този начин всички пионки да се преместят на най-горния ред, ако:

а) $n=9$;

б) $n=2011$?

*Решение*: Ясно е, че пионката в горния край на диагонала не може да се мести.

Останалите пионки трябва да обходят еднократно всички полета над главния диагонал, върху който са разположение пионките, т.е. преместването на пионките от диоганала към най-горния ред представлява преброяване на клетките над главния диагонал. Тъй като на всеки ход се местят по две пионки, то за да е възможно исканото преместване, трябва броят на клетките над главния диагонал да е четно число.

а) Възможно е. Броят на клетките над главния диагонал е:

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36,$$

което е четно число и следователно е изпълнено необходимото условие за осъществяване на исканото преместване. Ще посочим един начин за реализация на преместването. Да номерираме пионките отгоре надолу по главния диагонал последователно с числата от 1 до 9. Както беше отбелязано, пионката с № 1 не се мести. На първия ход преместваме пионките с № 2 и с № 9, при което пионката с № 2 отива на най-горния ред, а пионката с № 9 отива на реда на пионката с № 8. На втория ход преместваме пионките с № 3 и с № 7, при което пионката с № 3 отива на втория ред отгоре надолу, а пионката с № 7 отива на реда на пионката с № 6. На третия ход преместваме пионките с № 3 и с № 5, при което пионката с № 3 отива на най-горния ред, а пионката с № 5 отива на реда на пионката с № 4. След тези три хода пионките с №№ 1, 2 и 3 са на най-горния ред, а двойките № 4 и № 5, № 6 и № 7, № 8 и № 9 са намират на едни и същи редове, съответно на четвъртия, шестия и осмия ред отгоре надолу. С три хода премействаме пионките с № 4 и с № 5 на най-горния ред, с пет хода преместваме пионките с № 6 и с № 7 на най-горния ред и с още седем хода преместваме пионките с № 8 и с № 9 на най-горния ред. Общият брой ходове е $3+3+5+7=18$.

а) Не е възможно. Броят на клетките над главния диагонал е:

$$1+2+...+2010=(1+2010).1005=2011.1005,$$

което е нечетно число (произведение на нечетни числа) и следователно необходимото условие за осъществяване на исканото преместване е нарушено.

*Схема на оценяване*: общо **4 т.** за пълна реализация на преместване в случая а); частични кредити (без акумулиране): **1 т.** за посочен верен отговор, **2 т.** за преброяване на клетките над главния диагонал, **1 т.** за съображението, че броят на клетките над главния диагонал трябва да е четно число, **1 т.** за правилно започнато, но недовършено премстване; общо **3 т.** за б), от които **2 т.** за преброяване на клетките над главния диагонал (както в предната подточка – частични кредити без акумулиране).

**Задача 7.1.** От град А за град Б тръгнал автобус, а осем минути по-късно след него потеглила кола. Двете превозни средства се движили с постоянни скорости, като тази на колата била с 50% по-голяма от тази на автобуса. Колата изпреварила автобуса на 24 *км* от А. Когато тя пристигнала в Б, на автобуса му оставали още 48 *км* път.

а) Определете скоростите на автобуса и колата.

б) Определете разстоянието от А до Б.

в) С каква скорост е трябвало да се движи автобусът от А до Б, за да стигне в Б едновременно с колата?

*Решение*: а) Понеже скоростта на колата е 1,5 пъти по-голяма от тази на автобуса, то за първите 24 *км* времето на автобуса трябва да е 1,5 пъти по-голямо от това на колата (нека последното е $t$ минути). Понеже разликата на двете времена е $0,5t=8$ минути, то $t=16$ минути, а времето на автобуса е $1,5t=24$ минути. Така автобусът изминава 1 *км* за минута, т.е. скоростта му е 60 *км/ч*. Скоростта на колата е $1,5.60=90$ *км/ч*.

б) Нека след изпреварването колата да се е движила още $h$ часа. За това време тя е изминала $90h$ *км*, а автобусът – $60h$ *км*. Имаме $90h-60h=48$, откъдето $h=1,6$ *ч*.

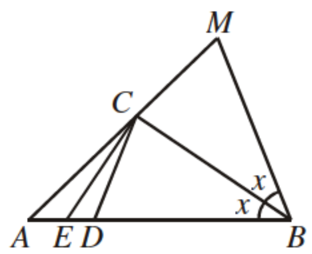
Тогава $90h = 90.1,6 = 144$ *км* и разстоянието от А до Б е $24 + 144 = 168$ *км*.

в) Понеже 24 минути са 0,4 часа, автобусът е разполагал с $0,4 + 1,6 = 2$ часа за изминаване на 168 *км*, т.е. скоростта му е трябвало да бъде $168 : 2 = 84$ *км/ч*.

<u>*Схема на оценяване*</u>: а) **2 т.**, от които **1 т.** за правилно съставяне на уравнение и **1 т.** за намиране на отговорите; б) **3 т.**, от които **1 т.** за правилно съставяне на уравнение и **2 т.** за завършване (**1 т.** , ако е намерена само втората част от пътя); в) **2 т.**, от които **1 т.** за откриване на времето за пътуване и **1 т.** за завършване на решението.

**Задача 7.2.** Даден е триъгълник $ABC$ и точки $E$ и $D$ върху страната $AB$ така, че $\angle ACE = \angle ECD = 12^\circ$. Да се намери $\angle ABC$, ако $\angle ECB = 90^\circ$ и $AC + CD = AB$.

*Решение*: Върху лъча $AC^{\rightarrow}$ построяваме точка $M$ така, че $AM = AC + CD$. Тогава $CD = CM$ и $\angle DCB = \angle BCM = 78^\circ$. Следователно $\Delta DCB \cong \Delta MCB$ (I признак), откъдето $\angle CBD = \angle CBM = x$. От теоремата за сбора на ъглите в $\Delta ACB$ намираме $\angle BAC = 180^\circ - (90^\circ + 12^\circ + x) = 78^\circ - x$. Тъй като $\Delta BMA$ е равнобедрен, за сбора на ъглите му имаме $4x + 78^\circ - x = 180^\circ$, откъдето $x = 34^\circ$ и $\angle ABC = 34^\circ$.




<u>*Схема на оценяване*</u>: **2 т.** за допълнителното построение (точка $M$ ); по **1 т.** (общо **4 т.**) за установяване, че $\angle DCB = \angle BCM = 78^\circ$, $\Delta DCB \cong \Delta MCB$, $\angle CBD = \angle CBM$ и $\angle BAC = 78^\circ - \angle ABC$; **1 т.** за завършване на решението.

**Задача 7.3.** Квадратна градина е разделена на 25 квадратни лехи с лица по 1 *кв. м*. Съседни наричаме лехите с обща страна. В някои от лехите са посадени цветя. Лехите, в които има цветя, остават с цветя и през следващата година. Ако някоя леха няма цветя, то на следващата година в нея поникват цветя само ако тя има поне две съседни лехи с цветя.

а) Възможно ли е в 14 поредни години лехите с цветя да са все различен брой?

б) Колко най-малко лехи трябва да се засадят, за да може след известно време във всички лехи да има цветя?

*Решение*:

а) Да. Един възможен начин е показан в таблицата, като числата показват номерата на годините, през които за пръв път се появяват цветя в съответните лехи (началното засаждане съответства на полетата с 1).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 1 | 13 | 14 |
| 1 | 4 | 5 | 12 | 13 |
| 1 | 3 | 6 | 11 | 12 |
| 1 | 2 | 7 | 10 | 11 |
| 1 | 1 | 8 | 9 | 1 |

б) Ако посадим цветя в петте лехи по някой диагонал, след пет години във всички лехи ще има цветя. Ако сме посадили цветя в не повече от четири лехи, то обиколката на цветната площ е не повече от 16 *м*. При поява на цветя в нова леха тази обиколка не нараства, понеже от нея се премахват поне 2 *м* (заради съседните засадени лехи) и се добавят не повече от 2 *м* (заради съседните незасадени лехи). Ако във всички лехи имаше цветя, обиколката щеше да стане 20 *м*, така че това е невъзможно. Така търсеният минимален брой лехи е 5.

<u>*Схема на оценяване*</u>: а) **3 т.**, от които **2 т.** за показано подходящо начално засаждане и **1 т.** за обяснение защо примерът работи (само отговор “да” без аргументация не се оценява); б) **4 т.**, от които **1 т.** за деклариран верен отговор, **1 т.** за

показано подходящо начално засаждане и **2 т.** за доказателство за минималност.

**Задача 8.1.** Пътят между хижите "Бор" и "Иглика" се състои в изкачване от хижа "Бор" до връх Скала и слизане от връх Скала до хижа "Иглика". Турист, който се движи със скорост 3 *km/h* при изкачване и 6 *km/h* при слизане, стига от "Бор" до "Иглика" за 210 минути, а се връща за 4 часа. Намерете разстоянията между хижите и върха.

*Решение*: Да означим с $x$ *km* разстоянието от хижа "Бор" до връх Скала и с $y$ *km* – разстоянието хижа "Иглика" до връх Скала. Тогава в едната посока туристът се изкачва $t_1=\dfrac{x}{3}$ часа и слиза $t_2=\dfrac{y}{6}$ часа, а в другата посока се изкачва $t_3=\dfrac{y}{3}$ часа и слиза $t_4=\dfrac{x}{6}$ часа. Тъй като 210 *min* = 3,5 *h*, от условието имаме $t_1+t_2=3{,}5$ и $t_3+t_4=4$. Така получаваме системата: $\left|\begin{array}{l}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}=3{,}5\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}=4\end{array}\right.$ или $\left|\begin{array}{l}2x+y=21\\ x+2y=24\end{array}\right.$, откъдето (след като съберем и извадим левите и десните части на уравненията) $\left|\begin{array}{l}x+y=15\\ y-x=3\end{array}\right. \Rightarrow x=6,\ y=9$ (отново след събиране и изваждане на левите и десните части на уравненията).

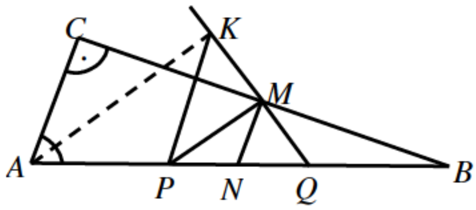
Следователно, разстоянията между хижите и върха са съответно са 6 *km* и 9 *km*.

<u>*Схема на оценяване*</u>: Общо **4 т.** за съставяне на модела и **3 т.** за решаване на системата. В рамките на тези точки се оценяват частични резултати: например **1 т.** за съображението, че на връщане изкачването става спускане, а спускането става изкачване; по **1 т.** за изразяване на времената на отиване и връщане; при липса на пълно решение на системата – **1 т.** за получаване на една или повече еквивалентни системи.

**Задача 8.2.** Даден е правоъгълен триъгълник $ABC$ с хипотенуза $AB=12$ *см* и катет $AC=4$ *см*. Точката $M$ е средата на катета $BC$, а точките $P$ и $Q$ са разположени върху хипотенузата $AB$ така, че $AP=PQ=QB$.

а) Да се намери $\angle PMQ$.

б) Ако ъглополовящата на $\angle BAC$ пресича лъча $\overrightarrow{QM}$ в точката $K$, да се намери дължината на отсечката $KP$.




*Решение*: а) Нека $N$ е средата на $PQ$. Тогава $AN=AP+PN=NQ+QB=NB$, т.е. $N$ е средата на $AB$ и следователно $MN$ е средна отсечка в $\Delta ABC$. Получаваме, че $MN=\dfrac{1}{2}AC$. Тъй като $AB=3AC$, то $PQ=AC$, откъдето $MN=\dfrac{1}{2}PQ$. Но $MN$ е медиана в $\Delta PQM$ и следователно $\angle PMQ=90°$.

б) От $MN \parallel AC$ следва, че $\angle NMC=90°$ и $\angle BNM=\angle BAC$ (съответни), а от $PN=MN$ имаме, че $\angle NPM=\angle PMN$. Тогава $\angle BAC=\angle BNM=2.\angle NPM$ и тъй като $AK$ е ъглополовяща, получаваме $\angle NPM=\angle BAK$. Следователно $AK \parallel PM$. Заключаваме, че $\angle AKQ=90^0$, т.е. $\Delta AQK$ е правоъгълен и тъй като $KP$ е медиана в него, то $KP = \frac{1}{2} AQ = AC = 4\,см$.

*Схема на оценяване*: Общо **3 т.** за а) и **4 т.** за б), както следва: **1 т.** за въвеждане на средата $N$, **1 т.** за заключението $MN = \frac{1}{2} PQ$ и **1 т.** за завършване на а); **2 т.** за заключението $\angle BAC = 2\angle NPM$, **1 т.** за заключението $AK \parallel PM$ и **1 т.** за завършване на решението.

**Задача 8.3.** Да се намерят целочислените решения на уравнението $10x^2 + y^2 = 2011$.

*Решение*: Нека $(x, y)$ е решение на уравнението. Тогава $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$ също са негови решения. Затова ще предполагаме, че $x > 0$ и $y > 0$. От условието следва, че $y^2 = 2011 - 10x^2$, откъдето $2011 - 10x^2 > 0$. Следователно $x^2 < \frac{2011}{10} < 225 = 15^2$, т.е. $x \le 14$. При това условие с непосредствена проверка се установява, че уравнението има единствено положително решение $x = 7$, $y = 39$. Следователно всички целочислени решения на даденото уравнение са: $(7,39)$, $(-7,39)$, $(7,-39)$ и $(-7,-39)$.

*Схема на оценяване*: **1 т.** за съображението, че $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$ са решения, ако $(x, y)$ е решение на уравнението; **3 т.** за оценката $x \le 14$ или за точна оценка за $y$ (**1 т.** за идея за оценка или за наличието на груба оценка); **2 т.** за разглеждане на всички случаи съгласно оценката (**1 т.** за частични разглеждания – поне три); **1 т.** за завършване на задачата.

*Задачите са предложени, както следва*:

зад. 4.1 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев, зад. 4.2 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев, зад. 4.3 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев

зад. 5.1 – Диана Миланова, зад. 5.2 – Диана Миланова, зад. 5.3 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев

зад. 6.1 – Ирина Шаркова, зад. 6.2 – Ирина Шаркова, зад. 6.3 – Ирина Шаркова

зад. 7.1 – Ивайло Кортезов, зад. 7.2 – Иван Ангелов, зад. 7.3 – Ивайло Кортезов

зад. 8.1 – Чавдар Лозанов, зад. 8.2 – Чавдар Лозанов, зад. 8.3 – Веселин Ненков