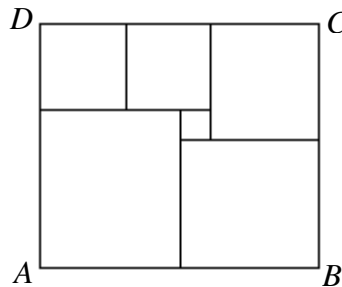


## РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ

**Задача 4.1.** *Дуорите* са същества, които имат два рога, а *хепторите* имат 7 рога. В едно стадо имало и от двата вида същества, а общият брой на рогата им бил 16. Колко дуори и хептори е имало в това стадо?

*Решение:* Веднага се вижда, че стадото би могло да се състои от 8 дуори, тъй като  $8 \times 2 = 16$ . Но по условие в стадото има поне един хептор, така че броят на дуорите в него е по-малък или равен на 7 (**2 т.**). Общият брой на дуорите не може да е равен или по-голям от 5, тъй като  $16 - 2 \times 5 = 6$ , а по условие хепторът има 7 рога (**2 т.**). Тогава броят на дуорите в стадото може да е 1, 2, 3 или 4. (**1 т.**) С последователна проверка установяваме, че в това стадо трябва да има точно 1 дуор и два хептора. (**2 т.**)

**Задача 4.2.** Даден правоъгълник  $ABCD$  е съставен от шест квадрата, както е показано на чертежа. Намерете обиколката на правоъгълника, ако дължината на страната му  $AB$  е 546 см.



*Решение:* Да означим с  $a$  см дължината на страната на двата еднакви квадрата в горния ляв ъгъл на правоъгълника  $ABCD$ , а с  $b$  см – дължината на страната на най-малкото квадратче. Тогава дължината на страната на най-големия квадрат в долния ляв ъгъл е  $(2a - b)$  см (**1 т.**). Дължината на страната на квадрата в горния десен ъгъл е  $(a + b)$  см (**1 т.**), а дължината на квадрата в долния десен ъгъл е  $(a + 2b)$  см (**1 т.**). Оттук за дължината на страната на най-големия квадрат получаваме, че е равна и на  $(a + 2b) + b = (a + 3b)$  см (**1 т.**). Следователно  $2a - b = a + 3b$ , откъдето  $a = 4b$  см (**1 т.**). Сега  $CD = 2a + a + b = 13b$ ,  $AD = a + a + 3b = 11b$  и обиколката на правоъгълника е  $48b$  (**1 т.**). От условието намираме  $13b = 546$ , т.е.  $b = 42$  см и следователно търсената обиколка е  $48 \cdot 42 = 2016$  см (**1 т.**).

**Задача 4.3.** Във всяко квадратче на таблица  $3 \times 3$  е записано числото 1. Казваме, че 3 квадратчета от таблицата образуват *тройка*, ако никои 2 от тях не са в един и същи ред или стълб. Извършва се следната операция: избира се *тройка* и към числата в квадратчетата от *тройката* се прибавя едно и също число.

1	1	1
1	1	1
1	1	1

а) Колко са различните *тройки*?

б) Проверете, че каквато и *тройка* да вземем, можем да намерим друга *тройка* така, че двете *тройки* да имат общо квадратче.

в) Възможно ли е след многократно прилагане на операцията числата във всички квадратчета на таблицата да се окажат различни?

*Решение:* а) Да номерираме квадратчетата на таблицата с числата от 1 до 9, както е показано. Избирането на *тройка* може да стане по 6 различни начина (**1 т.**).

Едно примерно доказателство е с изчерпване на възможностите. Например, квадратчето с № 1 може да бъде комбинирано с квадратчетата с номера 5 и 9 или с квадратчетата с номера 6 и 8. Разсъждавайки по същия начин за квадратчетата с номера 2 и 3, получаваме всички възможни *тройки*:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(1,5,9); (1,6,8); (2,4,9); (2,6,7); (3,4,8) и (3,5,7). **(1 т.)**

б) Когато тройките са изписани, например както в а), проверката се състои в отбелязване, че първите две *тройки* имат общо квадратче № 1, третата и четвъртата *тройка* имат общо квадратче № 2, а петата и шестата *тройка* имат общо квадратче № 3. **(1 т.)**

в) Да подредим *тройките* по произволен начин и да ги номерираме с I, II, III, IV, V и VI. Използването на римски числа не е задължително. Номерирането може да бъде направено например с думи или с арабски цифри, но трябва да се осъзнава разликата с номерацията на квадратчетата в таблицата. Едно възможно подреждане е да се използва реда в а) и съответното номериране е следното:

I = (1,5,9); II = (1,6,8); III = (2,4,9); IV = (2,6,7); V = (3,4,8) и VI = (3,5,7). **(1 т.)**

От б) следва, че операцията от условието на задачата трябва да се прилага към всяка тройка различен брой пъти **(1 т.)**. По-долу е описано едно примерно многократно прилагане на операцията, което води до искания резултат.

Към квадратчетата от I не прилагаме операцията и таблицата запазва

1	1	1
1	1	1
1	1	1

А

11	1	1
1	1	11
1	11	1

Б

11	101	1
101	1	11
1	11	101

В

11	1101	1
101	1	1011
1001	11	101

Г

11	1101	10 001
10 101	1	1011
1001	10 011	101

Д

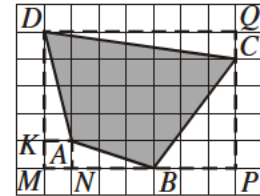
11	1101	110 001
10 101	100 001	1011
101 001	10 011	101

Е

първоначалния си вид, означен с А. Към квадратчетата от II прилагаме операцията 10 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с Б. Към квадратчетата от III прилагаме операцията 100 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с В. Към квадратчетата от IV прилагаме операцията 1000 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с Г. Към квадратчетата от V прилагаме операцията 10 000 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с Д. Накрая към квадратчетата от VI прилагаме операцията 100 000 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с Е. Сега е достатъчно да забележим, че и деветте числа са различни. **(2 т.)** Посоченото решение не е единствено.

**Задача 5.1.** Правоъгълникът на чертежа е съставен от еднакви квадратчета с дължина на страната цяло число сантиметри и има лице 252 кв.см. Да се намери лицето на четириъгълника  $ABCD$ .

*Решение:* Правоъгълникът от условието на задачата се състои от  $9 \cdot 7 = 63$  малки квадратчета и следователно лицето на едно квадратче е  $252 : 63 = 4$  кв.см. Тогава дължината на страната на едно квадратче е 2 см **(1 т.)**. За търсеното лице  $S$  имаме:



$$S = S_{MPQD} - (S_{MNAK} + S_{NBA} + S_{BPC} + S_{CQD} + S_{KAD}). \quad (2 \text{ т.})$$

Последователно намираме:  $S_{MPQD} = 7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$  кв. см,  $S_{MNAK} = 4$  кв. см,  
 $S_{NBA} = 6$  кв. см,  $S_{BPC} = 24$  кв. см,  $S_{CQD} = 14$  кв. см и  $S_{KAD} = 8$  кв. см. **(3 т.)**  
 Следователно  $S = 140 - (4 + 6 + 24 + 14 + 8) = 84$ ,  $S = 84$  кв. см. **(1 т.)**

**Задача 5.2.** Госпожата по математика даде следната домашна работа:

“Всеки да измисли задача с дробни, в която да участва числото 2012.”

Христо измисли следната задача: “Да се намери сумата на всички правилни, несъкратими, обикновени дробни със знаменател 2012.” Задачата на брат му Петър беше: “Намерете сумата  $0,0001 + 0,0002 + \dots + 0,2012$ .”

Решете съставените от братята задачи и намерете коя от търсените суми е по-голяма и с колко.

*Решение:* Първо ще пресметнем числото на Петър. Групираме числата по две в  $2012 : 2 = 1006$  групи по следния начин (първото с последното събираемо, второто с предпоследното събираемо и т. н.):

$$0,0001 + 0,0002 + 0,0003 + \dots + 0,2011 + 0,2012 = \\ = (0,0001 + 0,2012) + (0,0002 + 0,2011) + \dots + (0,1006 + 0,1007) = 1006 \cdot 0,2013 = 202,5078 \quad (2 \text{ т.})$$

За да пресметнем числото на Христо, първо трябва да изброим колко дробни ще събираме. Понеже  $2012 = 4 \cdot 503$ , то всички дробни с числител четно число и знаменател 2012 ще са съкратими. Да обърнем внимание, че 503 е просто число. Съкратими ще са още и дробите с числител 503 и  $3 \cdot 503$ . **(1 т.)** Следователно дробите, които събираме, са с числител нечетни числа, по-малки от 2012 и различни от 503 и  $3 \cdot 503$ , т.е. възможните числител са 1, 3, ..., 501, 505, ..., 1507, 1511, ..., 2011, които са общо  $2012 : 2 - 2 = 1004$  на брой **(1 т.)**. Отново можем да групираме по двойки:

$$\frac{1}{2012} + \frac{2011}{2012} = \frac{3}{2012} + \frac{2009}{2012} = \dots = 1, \text{ като липсва само } \frac{503}{2012} + \frac{1509}{2012} \quad (1 \text{ т.})$$

Следователно търсената сума е  $1004 : 2 = 502$ , което е и числото на Христо **(1 т.)**. Разликата на двете суми е  $502 - 202,5078 = 299,4922$  **(1 т.)**.

**Задача 5.3.** В ребуса  $\text{КУЧЕ} + \text{ЗА} + \text{ЛОВ} = \text{2012} + n$  на различните букви в лявата страна съответстват различни цифри от 1 до 9 (без 0), а  $n$  е произволно естествено число.

а) Да се намери най-малкото естествено число  $n$ , за което ребусът има решение.

б) Ако  $n = 2011$ , намерете най-голямата възможна стойност на  $\text{КУЧЕ}$ , за която ребусът има решение.

*Решение:* а) Лявата страна има 9 различни букви, което означава, че всяка цифра от 1 до 9 се среща точно по веднъж. Следователно остатъкът при деление с 9 на лявата страна е равен на остатъка при делението на  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$  с 9. Заключаваме, че лявата страна се дели на 9 **(1 т.)**. Така получаваме, че ако ребусът има решение, то  $n$  е поне 4 (2016 се дели на 9) **(1 т.)**. Остава да дадем пример при  $n = 4$ . Ето един:  $1372 + 596 + 48 = 2012 + 4$  **(2 т.)**.

б) Ясно е, че най-голямата възможна стойност на  $K$  е 3. За отхвърляне с проверки на случаите  $Y = 9$  и  $Y = 8$  по (1 т.). За намиране на решението  $KУЧЕ = 3796$  и показан пример  $3796 + 42 + 185 = 4023$  (1 т.).

**Задача 6.1.** Пирамида има височина  $h$  м и основа – правоъгълен триъгълник с катети  $a$  м и  $b$  м. Пресметнете обема на пирамидата, ако:

$$a = 7\frac{7}{24} + \frac{15}{7 \cdot (-2)^2} - 0,1 : 0,024 + \frac{5}{56}(-3)^3, \quad b = \frac{35^5(-15)^2(-6)^7}{(-14)^5 15^8} \quad \text{и} \quad h = \frac{-3,206 - 1,344}{1,821 - 5,071}.$$

*Решение:* Имаме  $a = \frac{175}{24} + \frac{15}{28} - \frac{100}{24} - \frac{135}{56} = \frac{75}{24} - \frac{105}{56} = \frac{25}{8} - \frac{15}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$  (2 т.);

$$b = \frac{35^5 6^7}{14^5 15^6} = \frac{5^5 7^5 2^7 3^7}{2^5 7^5 3^6 5^6} = \frac{12}{5} \quad (2 \text{ т.}); \quad h = \frac{-4,55}{-3,25} = \frac{91}{65} = \frac{7}{5} \quad (2 \text{ т.});$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{5} = 0,7 \text{ куб. м} \quad (1 \text{ т.}).$$

**Задача 6.2.** Георги трябвало да умножи  $11^3$  с трицифреното число  $T$ , чиято цифра на единиците е два пъти по-голяма от цифрата на десетиците, а цифрата на стотиците му е с 5 по-голяма от цифрата на десетиците. Но той сгрешил при умножението и разменил мястото на единиците и десетиците на  $T$ . Така получил резултат, с 11979 по-голям от верния. Намерете  $T$ .

*Решение:* Нека цифрата на десетиците на  $T$  е  $x$ , така че  $T = 100(x+5) + 10x + 2x$  (1 т.), а обърканото число е  $100(x+5) + 20x + x$  (1 т.). Тогава  $11^3 \cdot (21x - 12x) = 11979$ , откъдето  $x = 1$  (4 т.). Следователно търсеното число е 612 (1 т.).

**Задача 6.3.** В магазин има дини по 5 кг, пъпеши по 2 кг и сливи по 50 г. Плодовете общо са 200 и тежат 100 кг. По колко плода от всеки вид може да има?

*Решение:* Ако има  $d$  дини,  $p$  пъпеша и  $s$  сливи, то  $d + p + s = 200$  (1 т.). Масата в грамове е  $5000d + 2000p + 50s = 100000$ , което след деление на 50 води до  $100d + 40p + s = 2000$  (1 т.). Изваждайки първото уравнение, получаваме  $99d + 39p = 1800$  и след деление на 3 имаме  $33d + 13p = 600$  (1 т.). Понеже сборът и първото събираемо се делят на 3, трябва  $p = 3q$  за някое цяло  $q \geq 0$  (1 т.). Заместваме и съкращаваме:  $11d + 13q = 200$  (1 т.). С непосредствена проверка откриваме решенията  $(d; q) = (4; 12)$  и  $(17; 1)$ . Окончателно отговорите са  $(d; p; s) = (4; 36; 160)$  (1 т.) и  $(17; 3; 180)$  (1 т.).

**Задача 7.1.** Да се намерят всички цели решения на уравнението  $2xy + x - 2y = 2012$ .

*Решение:* Представяме уравнението във вида:

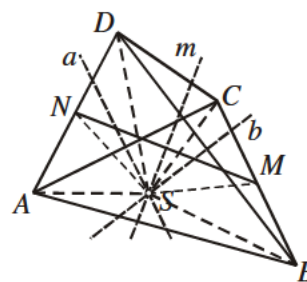
$$2xy + x - 2y = 2012 \Leftrightarrow 2xy + x - 2y - 1 = 2011 \Leftrightarrow (x-1)(2y+1) = 2011. \quad (3 \text{ т.})$$

Понеже 2011 е просто и търсим цели решения, имаме следните възможности:

- 1)  $x-1 = 2011, 2y+1 = 1 \Rightarrow x = 2012, y = 0;$  (1 т.)
- 2)  $x-1 = 1, 2y+1 = 2011 \Rightarrow x = 2, y = 1005;$  (1 т.)
- 3)  $x-1 = -2011, 2y+1 = -1 \Rightarrow x = -2010, y = -1;$  (1 т.)
- 4)  $x-1 = -1, 2y+1 = -2011 \Rightarrow x = 0, y = -1006.$  (1 т.)

**Задача 7.2.** В четириъгълника  $ABCD$  страните  $BC$  и  $AD$  са равни, а точките  $M$  и  $N$  са техните среди. Да се докаже, че симетралите на  $AC$ ,  $BD$  и  $MN$  се пресичат в една точка.

*Решение:* Нека  $a$  и  $b$  са симетралите на  $AC$  и  $BD$  и  $a \cap b = S$ . (1 т.) От  $SA = SC$ ,  $SB = SD$  и  $BC = AD$  следва, че  $\triangle ADS \cong \triangle CBS$  (III пр.) (3 т.), откъдето  $\sphericalangle DAS = \sphericalangle BCS$ . Следователно  $\triangle ANS \cong \triangle CMS$  (I пр.) (2 т.). Оттук  $SN = SM$ , т.е. точката  $S$  е от симетралата  $m$  на  $MN$ . (1 т.)



**Задача 7.3.** В квадрат  $3 \times 3$ , съставен от 9 малки квадратчета, във всяко квадратче е записано всяко едно от числата от 1 до 9. За всеки от четирите подквadrата  $2 \times 2$  е пресметнат сборът от записаните числа. Най-малкият от четирите сбора наричаме характеристика на квадрата. Да се намери най-голямата възможна характеристика на квадрата.

*Решение:* Нека  $x$  е характеристиката на квадрата. Да намерим сборовете на числата в четирите подквadrата и да ги съберем. В получения сбор числата  $a_i$ , които стоят в ъглите на квадрата, участват по 1 път, числата  $b_i$ , които стоят в средата на страните – по 2 пъти и числото  $c$ , което е в центъра на квадрата – 4 пъти. (2 т.) Понеже  $x$  е най-малкият сбор имаме  $4x \leq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + 4c$ . (1 т.) Тъй като търсим най-голямата възможна стойност на  $x$ , получаваме  $4x \leq (1 + 2 + 3 + 4) + 2(5 + 6 + 7 + 8) + 4 \cdot 9 = 98$ , т.е.  $x \leq \frac{98}{4} = 24\frac{1}{2}$ . (1 т.) Но  $x$  е естествено число и следователно  $x \leq 24$ . (1 т.) Вдясно е показан пример на квадрат с характеристика 24. (2 т.)

$a_1$	$b_1$	$a_2$
$b_2$	$c$	$b_3$
$a_3$	$b_4$	$a_4$

1	7	2
8	9	6
3	5	4

**Задача 8.1.** Сред учениците от 8 клас на едно училище провели анкета – кой обича да гледа футбол и кой – баскетбол. Оказало се, че 90% от любителите на футбола обичат и баскетбол, а 72% от любителите на баскетбола обичат и футбол. От запитаните 10% не обичат нито футбол, нито баскетбол. Колко процента от анкетираните обичат само един спорт? Какъв е възможно най-малкият брой анкетирани?

*Решение:* Нека  $x\%$  обичат футбол и  $y\%$  – баскетбол. Тогава от условието получаваме системата:

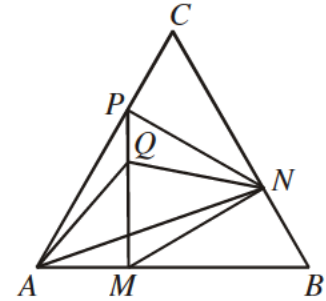
$$\begin{cases} 0,9x = 0,72y \\ 10 + y + (1 - 0,9)x = 100 \end{cases} \quad (2 \text{ т.}).$$

Имаме 
$$\begin{cases} 0,9x = 0,72y \\ 10 + y + (1 - 0,9)x = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{10}x = \frac{72}{100}y \\ 10 + y + 0,1x = 90 \end{cases}, \quad \text{откъдето намираме}$$

$x = \frac{200}{3}\%$  и  $y = \frac{250}{3}\%$  (2 т.). Процентът на тези, които обичат само един спорт, е  $0,1x + 0,28y = 30\%$  (1 т.). Броят на анкетираните трябва да се дели на 10 и 30 (1 т.). Най-малкият възможен брой анкетирани е 30. Наистина, ако са анкетирани 30 ученици, то любителите на футбола са  $\frac{30 \cdot 200}{3 \cdot 100} = 20$ , любителите на баскетбола са  $\frac{30 \cdot 250}{3 \cdot 100} = 25$ , а 18 обичат и двата спорта (1 т.).

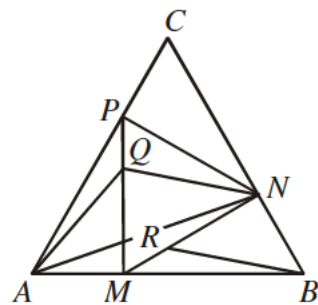
**Задача 8.2.** Върху страните  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  на равностранния триъгълник  $ABC$  са взети съответно точки  $M$ ,  $N$  и  $P$  такива, че  $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \frac{1}{2}$ . Върху отсечката  $PM$  е взета точка  $Q$  такава, че  $\frac{PQ}{QM} = \frac{1}{2}$ . Да се намерят ъглите на триъгълник  $AQN$ .

**Решение 1:** Означаваме  $\overline{AM} = x$ . Разглеждаме ротация  $\rho(A, +60^\circ)$  (1 т.). Нека  $\rho(x) = x_1$  и следователно  $\overline{AB} = 3x$ ,  $\overline{AP} = 2x_1$  и  $\overline{AC} = 3x_1$ . Пресмятаме  $\overline{AQ} = \frac{\overline{AM} + 2\overline{AP}}{3} = \frac{x + 4x_1}{3}$  и  $\overline{AN} = \frac{2\overline{AB} + \overline{AC}}{3} = \frac{6x + 3x_1}{3}$ . Следователно  $\overline{QN} = \overline{AN} - \overline{AQ} = \frac{5x - x_1}{3}$ .



Тогава  $\rho(\overline{QN}) = \frac{5\rho(x) - \rho(x_1)}{3} = \frac{5x_1 - (x_1 - x)}{3} = \frac{4x_1 + x}{3} = \overline{AQ}$  (3 т.). Получаваме, че триъгълник  $AQN$  е равнобедрен с ъгли  $120^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $30^\circ$  (3 т.).

**Решение 2:** Върху отсечката  $MN$  избираме точка  $R$  такава, че  $\frac{MR}{RN} = \frac{1}{2}$ . Нека  $PM_1 \perp AB$  ( $M_1 \in AB$ ). От  $\sphericalangle APM_1 = 30^\circ$  следва, че  $AM_1 = \frac{1}{2}AP = AM$  и следователно  $M_1 \equiv M$ . Аналогично  $MN \perp BC$  и  $NP \perp AC$ . Получаваме, че  $\triangle AMP \cong \triangle BNM \cong \triangle CPN$  (1 т.), откъдето  $PM = MN = NP$  и  $\sphericalangle AQM = \sphericalangle BRN$ . Следователно  $\triangle AMQ \cong \triangle BNR$ , т.е.  $AQ = BR$ . Пресмятаме, че  $\overline{QR} = \overline{QM} + \overline{MR} = \frac{1}{3}(\overline{AB} - \overline{AC}) = \frac{1}{3}\overline{CB} = \overline{NB}$  и заключаваме, че  $RBNQ$  е успоредник, откъдето  $QN = BR = AQ$  (2 т.). От друга страна  $\sphericalangle NQR = \sphericalangle NBR = 90^\circ - \sphericalangle BRN$ . Оттук  $\sphericalangle AQM + \sphericalangle NQR = \sphericalangle BRN + 90^\circ - \sphericalangle BRN = 90^\circ$  (1 т.). Нека  $QR_1 \perp MN$  ( $R_1 \in MN$ ). От  $\sphericalangle MQR_1 = 30^\circ$  следва, че  $MR_1 = \frac{1}{2}MQ = \frac{1}{2}RN = MR$  и значи  $R_1 \equiv R$ . Следователно  $\sphericalangle AQN = 120^\circ$  (2 т.), а другите два ъгъла са по  $30^\circ$  (1 т.).

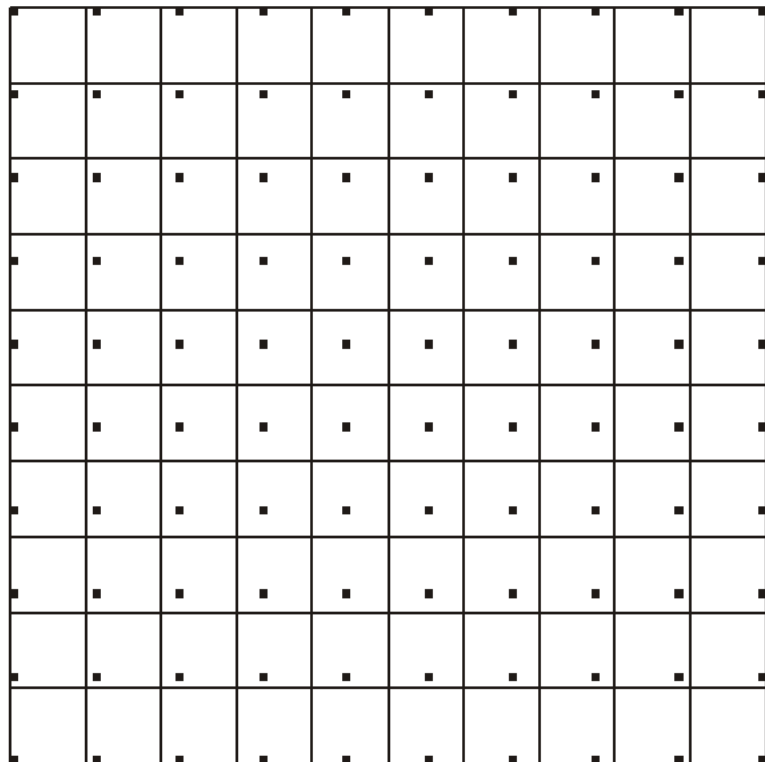


**Задача 8.3.** Нека  $ABCD$  е квадрат с дължина на страната 10. Да се намери максималният брой точки, които могат да бъдат разположени във вътрешността на квадрата, така че всеки квадрат с дължина на страната 1 и страни, успоредни на страните на  $ABCD$ , да съдържа (включително по контура си) най-много 4 точки.

**Решение:** Да разгледаме координатна система с начало точката  $A$  и такава, че точката  $B$  има координати  $(10,0)$ , точката  $C$  има координати  $(10,10)$ , а точката  $D$  има координати  $(0,10)$ . Да разгледаме квадратите с върхове в точките с координати  $(i, j)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i+1, j+1)$  и  $(i, j+1)$  за цели  $0 \leq i, j \leq 9$ . Тези квадрати са с дължина на страната, равна на 1 и страните им са успоредни на страните на квадрата  $ABCD$ . Следователно всеки един от тях може да съдържа най-много 4 от точките. Тъй като квадратите са общо 100 и покриват напълно  $ABCD$ , в  $ABCD$  не могат да бъдат разположени повече от 400 точки, удовлетворяващи условието на задачата (3 т.).

Ще докажем, че в  $ABCD$  могат да бъдат разположени 400 точки, удовлетворяващи условието на задачата. Да забележим, че един квадрат с дължина на страната 1 и страни, успоредни на страните на  $ABCD$ , съдържа две точки  $E$  и  $F$  с координати съответно  $(x_E, y_E)$  и  $(x_F, y_F)$  тогава и само тогава, когато  $|x_E - x_F| \leq 1$  и  $|y_E - y_F| \leq 1$ . Да разгледаме квадратчетата с върхове в точките с координати,  $\left(i + \frac{i}{10}, j + \frac{j}{10}\right)$ ,  $\left(i + \frac{i+1}{10}, j + \frac{j}{10}\right)$ ,  $\left(i + \frac{i+1}{10}, j + \frac{j+1}{10}\right)$  и  $\left(i + \frac{i}{10}, j + \frac{j+1}{10}\right)$  за цели  $0 \leq i, j \leq 9$ . Тези квадратчета са общо 100 на брой и имат дължина на страната  $\frac{1}{10}$ . Нека изберем по 4 точки от вътрешността на всяко едно от тях. Така сме избрали общо 400 точки от вътрешността на  $ABCD$  (2 т.).

Да допуснем, че квадрат с дължина на страната 1 и страни, успоредни на  $ABCD$ , съдържа повече от 4 точки. Тогава той съдържа точка  $E$  с координати  $(x_E, y_E)$  от квадратче с върхове  $\left(i + \frac{i}{10}, j + \frac{j}{10}\right)$ ,  $\left(i + \frac{i+1}{10}, j + \frac{j}{10}\right)$ ,  $\left(i + \frac{i+1}{10}, j + \frac{j+1}{10}\right)$  и  $\left(i + \frac{i}{10}, j + \frac{j+1}{10}\right)$ , и точка  $F$  с координати  $(x_F, y_F)$  от квадратче с върхове  $\left(k + \frac{k}{10}, s + \frac{s}{10}\right)$ ,  $\left(k + \frac{k+1}{10}, s + \frac{s}{10}\right)$ ,  $\left(k + \frac{k+1}{10}, s + \frac{s+1}{10}\right)$  и  $\left(k + \frac{k}{10}, s + \frac{s+1}{10}\right)$ , като  $i, j, k$  и  $s$  са цели числа и  $(i, j) \neq (k, s)$ .



Следователно в сила са следните неравенства:  $i + \frac{i}{10} < x_E < i + \frac{i+1}{10}$ ,  $j + \frac{j}{10} < y_E < j + \frac{j+1}{10}$ ,  $k + \frac{k}{10} < x_F < k + \frac{k+1}{10}$ ,  $s + \frac{s}{10} < y_F < s + \frac{s+1}{10}$ ,  $|x_E - x_F| \leq 1$  и  $|y_E - y_F| \leq 1$ . От първите 4 неравенства получаваме

$$i - k + \frac{i - k - 1}{10} < x_E - x_F < i - k + \frac{i - k + 1}{10}$$

$$j - s + \frac{j - s - 1}{10} < y_E - y_F < j - s + \frac{j - s + 1}{10}.$$

Отгук и от неравенствата  $|x_E - x_F| \leq 1$  и  $|y_E - y_F| \leq 1$ , получаваме  $||1(i - k)| < 11$  и  $||1(j - s)| < 11$ , откъдето  $i = k$  и  $j = s$ , което противоречи на  $(i, j) \neq (k, s)$ . Следователно 400-те избрани точки удовлетворяват условието на задачата (2 т.).

*Задачите са предложени, както следва:*

зад. 4.1 – Живко Желев, зад. 4.2 – Иван Ангелов, зад. 4.3 – Светлозар Дойчев, Веселин Ненков и Сава Гроздев;  
зад. 5.1 – Теодоси Витанов, зад.5.2 – Ирина Шаркова, зад.5.3 – Иван Ангелов;  
зад. 6.1 – Ивайло Кортезов, зад. 6.2 – Ивайло Старибратов, зад. 6.3 – Ивайло Кортезов;  
Зад. 7.1, 7.2 и 7.3 – Теодоси Витанов  
зад. 8.1 – Теодоси Витанов, зад. 8.2 – Симеон Замковой, зад. 8.3 – Христо Ганчев.