Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О   Н А   О Б Р А З О В А Н И Е Т О   И   Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 30 МАРТ 2014 Г.

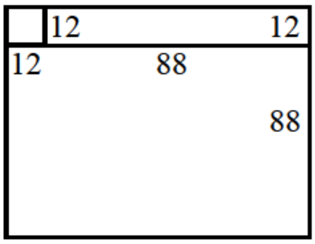
4 – 8 КЛАС
Задачи, решения, оценяване

4.1. Ако разполагам с $15.2014-10.2013+11.2012-11.2011-7.1313$ лева, ще ми стигнат ли да купя общо $528:(72.18-46.23+36.9-23.23)$ енциклопедии, които струват по $(17.3200-33.1600):(73.4-53.4)$ лева всяка? Ако да, колко лева ще ми останат? Ако не, колко лева не ми достигат?

Решение: Разполагам с $30210-20130+11-9191=10091-9191=900$ лева. Броят на енциклопедиите е $528:(1296-1058+324-529)=528:(1620-1587)=528:33=16$, а единичната им цена е $1600:80=20$. За покупката са ми необходими $16.20=320$ лева и ще ми останат $900-320=580$ лева.

Оценяване: по 2 точки за пресмятане на всеки от трите числови израза; 1 точка за завършване на решението.

4.2. Правоъгълник има периметър $(234.6+149.4):(49.89-24.89-25.87)$ см и широчина $(19.93+17.48-15-111.16):(12.48+9.49-24.42)$ мм. С колко квадратни милиметра лицето на правоъгълника е по-малко от лицето на квадрат със същия периметър? Покажете как може квадратът да се разреже на квадратче и две правоъгълничета така, че от правоъгълничетата да се сглоби даденият правоъгълник; отбележете дължината и широчината на всяка от получените части при разрязването.



Решение: Периметърът на правоъгълника е

$(1404+596):(25.89-25.87)=2000:50=40$ см $=400$ мм,

а широчината му е $792:9=88$ мм. Тогава дължината му е $200-88=112$ мм, а лицето му е $88.112=9856$ кв. мм. Страната на квадрата е $400:4=100$ мм, а лицето му е 10000 кв. мм, което е с $10000-9856=144$ кв. мм повече от лицето на правоъгълника. Вдясно е показано е едно примерно разрязване, при което малкият правоъгълник трябва да се завърти под прав ъгъл и да се залепи до големия.

Оценяване: по 1 точка за пресмятане на периметъра и широчината на правоъгълника; по 0,5 точки за пресмятане на дължината на правоъгълника, лицето на правоъгълника, дължината на страната на квадрата и лицето на квадрата; 2 точки за подходящо разрязване; 1 точка за завършване на решението.

4.3. Разполагате с 9 бели и 9 червени еднакво големи кубчета. Трябва да се изберат няколко (повече от едно) и да се сглоби с тях по-голям плътен куб. По колко различни начина може да изглежда новият куб?

Забележка. Два куба не се считат за различни, ако единият може да се получи чрез завъртане на другия.

Решение: Кубът може да се състои от $2\times2\times2=8$ малки кубчета, от $3\times3\times3=27$ малки кубчета и т.н. Тъй като разполагаме само с 18 малки кубчета, то единствената възможност е да използваме само 8 от тях. Различните варианти за комбиниране на бели и червени кубчета са описани по-долу. На всяка от картинките считаме, че невидимите кубчета са бели.

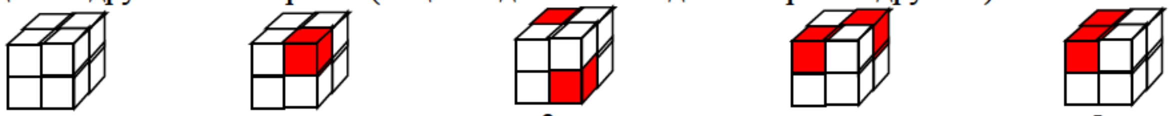
Случай 1. 0 червени и 8 бели кубчета (1 вариант) – картинка № 1.

Случай 2. 1 червено и 7 бели кубчета (1 вариант) – картинка № 2.

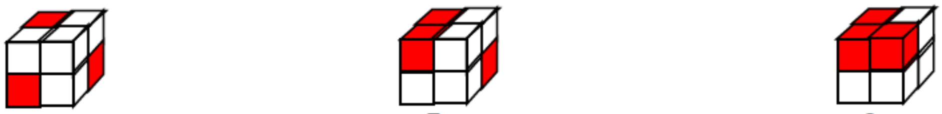
Случай 3. 2 червени и 6 бели кубчета (3 варианта) – картинки № 3, № 4 и № 5.

Случай 4. 3 червени и 5 бели кубчета (3 варианта) – картинки № 6, № 7 и № 8.

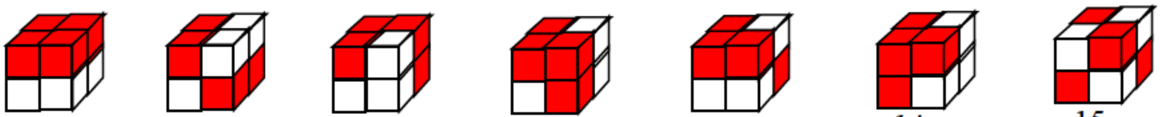
Случай 5. 4 червени и 4 бели кубчета (7 варианта) – картинки № 9, № 10, № 11, № 12, № 13, № 14 и № 15. Да обърнем внимание, че кубовете № 11 и № 12 не се получават едно от друго със завъртане (защото едното е огледален образ на другото).



1 2 3 4 5



6 7 8



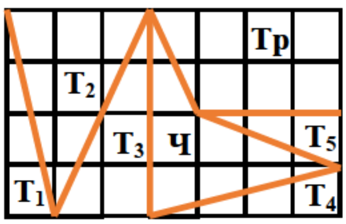
9 10 11 12 13 14 15

Забелязваме, че ако разменим местата на червените и белите кубчета, то случаите на 8 червени, 7 червени, 6 червени и 5 червени се свеждат до разгледаните случаи от 1. до 4. включително. Оттук получаваме отговора на задачата:

$$2(1+1+3+3)+7=2.8+7=16+7=23.$$

Оценяване: 1 точка за заключение, че кубът трябва да е съставен от $2\times2\times2=8$ малки кубчета и разглеждане на случаите с 0 и 8 червени малки кубчета; 1 точка за случаите с 1 и 7 червени малки кубчета; по 1 точка за всеки от случаите с 2, 3, 4, 5 и 6 червени малки кубчета.

5.1. През междучасието Емил си купил от магазина голям шоколад във формата на правоъгълник 14 см на 8 см, разделен на 28 еднакви квадратчета. По пътя към училище той изтървал шоколада, който се счупил на 7 парчета: пет триъгълника (**T_1**, **T_2**, **T_3**, **T_4** и **T_5**), един трапец (**Тр**) и един четириъгълник (**Ч**), както е показано на чертежа. Намерете лицето на всяко от парчетата.



Решение: Тъй като широчината на шоколада е 8 см и по широчината има 4 квадратчета, то дължината на страната на едно малко квадратче е $8:4=2$ см, а лицето му е $2.2=4$ кв. см. Триъгълникът **T_1** има основа 2 см и височина 8 см. Следователно лицето му е

$\frac{2.8}{2}=8$ кв. см. Триъгълникът **T₂** има основа $3.2=6$ см и височина 8 св. Следователно лицето му е $\frac{6.8}{2}=24$ кв. см. Триъгълникът **T₃** има основа $2.2=4$ см и височина 8 см. Следователно лицето му е $\frac{4.8}{2}=16$ кв. см. Триъгълникът **T₄** има основа $4.2=8$ см и височина 2 см. Следователно лицето му е $\frac{8.2}{2}=8$ кв. см. Триъгълникът **T₅** има основа $3.2=6$ см височина 2 см. Следователно лицето му е $\frac{6.2}{2}=6$ кв. см. Трапецът **Тр** има основи $3.2=6$ см и $4.2=8$ см, както и височина $2.2=4$ см. Следователно лицето му е $\frac{6+8}{2}\cdot 4=28$ кв. см. Сборът от лицата на петте триъгълника и трапеца е равен на $8+24+16+8+6+28=90$ кв. см. Полученото лице ще извадим от лицето на целия шоколад и ще получим лицето на четириъгълника **Ч**. Тъй като шоколадът има формата на правоъгълник с размери $7.2=14$ см и $4.2=8$ см, лицето му е $14.8=112$ кв.см. Тогава лицето на четириъгълника е $112-90=22$ кв. см.
Оценяване: По 1 точка за намиране лицето на всяка от седемте части на шоколада.

5.2. . Решете ребуса

ГАЦО + БАЦО = ЗАЙЦИ,

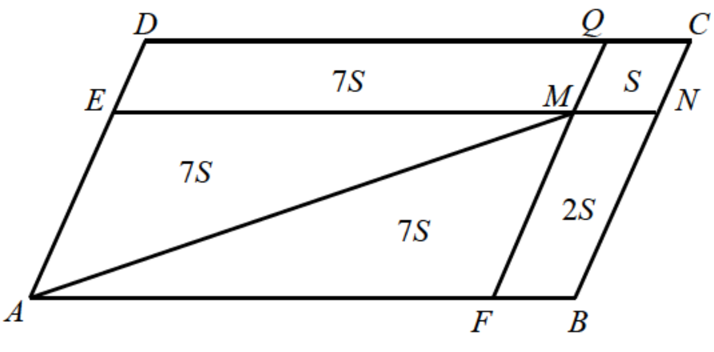
ако на еднаквите букви съответстват еднакви цифри, а на различните букви съответстват различни цифри. Освен това числото, което съответства на думата ЗАЙЦИ, е възможно най-голямо.
Решение: Ребусът е сбор на две четирицифрени числа, като резултатът е петцифрено число. Оттук следва, че на буквата „З“ съответства 1, т.е. „З“=1. Тъй като ЗАЙЦИ трябва да е възможно най-голямо число, то е естествено да опитаме с „А“=9. Но тогава числото Г+Б+1 няма как да е равно на 19. Ако „А“=8, то числото Г+Б+1 може да е равно на 18 само в случай, че Г и Б са цифрите 9 и 8. Това е невъзможно, защото цифрата 8 е вече използвана за „А“. Ако „А“=7, то Г+Б+1 може да е равно на 17 само ако „Г“=“Б“=8 или Г и Б са цифрите 9 и 7. И двата случая е нарушено условието в задачата. Ще докажем, че при „А“=6 задачата има решение. В този случай Г+Б+1=16 само ако Г и Б са цифрите 8 и 7. Сега „Й“=2 или „Й“=3. За да получим по-голяма стойност на ЗАЙЦИ ще опитаме с „Й“=3 и „Ц“=9. Сега единствената възможност за О е „О“=5. Получаваме сбора 8695+7695=16390 е непосредствено проверяваме, че всички условия в задачата са изпълнени. Задачата има още едно решение, като разменим стойностите на Г и Б, а именно 7695+8695=16390.
Оценяване: 1 точка за намиране на „З“=1; по 1 точка за отхвърляне на трите случая „А“=9, „А“=8 и „А“=7; 3 точки за завършване на решението. По 1 точка за всеки от двата отговора, когато липсват обосновки (тези точки не се добавят към предишните).

5.3. Всеки месец един търговец записвал в тетрадка по едно число *X*, което показвало разликата между приходите *П* и разходите *Р* за месеца, т.е. разликата между парите, които търговецът получавал през месеца и парите, които харчел през месеца. Търговецът забелязал, че записаните през последните пет месеца числа X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5 са естествени и притежават следните свойства: числото $\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}{5}$ не е цяло, а сумата на кои да е две, три или четири числа от тези пет, разделена със съответния брой на събираемите, е цяло число. Например, ако вземем три от числата, да кажем X_1, X_3 и X_4, то числото $\dfrac{X_1+X_3+X_4}{3}$ е цяло. Възможно ли е да се случи това? Обосновете отговора си!

Решение: Ще посочим пример, който изпълнява условията на задачата. Нека $X_1=X_2=X_3=X_4=1$ и ще намерим $X_5=a$ така, че да са изпълнени исканите свойства. Забелязваме, че числото a трябва да е нечетно. В противен случай числото $a+1$ ще е нечетно и $\dfrac{a+1}{2}$ няма да е цяло. Така, получаваме, че a трябва да дава остатък 1 при деление на 2. Тъй като $1+1+a$ трябва да се дели на 3, то a трябва да дава остатък 1 при деление на 3. Тъй като $1+1+1+a$ трябва да се дели на 4, то a трябва да дава остатък 1 при деление на 4. В същото време числото $1+1+1+1+a$ не трябва да се дели на 5, за което е достатъчно да изберем a така, че да се дели на 5. Числото $a-1$ трябва да се дели на 2, на 3 и на 4, а следователно и на най-малкото общо кратно на тези числа, което е 12. Разглеждаме последователните кратни на 12. Ако $a-1=12$, то $a=13$, което обаче не се дели на 5. Но ако $a-1=24$, то $a=25$, което вече се дели на 5. По този начин установихме, че числата 1, 1, 1, 1 и 25 изпълняват условията в задачата. Оттук непосредствено следва, че и числата n, n, n, n и $25n$ също изпълняват условията на задачата при произволно естествено число n. От направените разглеждания следва, че са възможни и много други случаи.

Оценяване: 3 точки, ако е доказано, че е достатъчно четири от числата да се изберат равни; 4 точки за завършване на решението (от тях 1 точка за частични резултати в тази част на решението). Задачата се оценява с пълен брой точки, ако е посочен пример и е направена проверка, че примерът е работещ.

6.1. Дадени са успоредник $ABCD$ и ромб $MNCQ$, за които точката C е общ връх, точката M е във вътрешността на успоредника, а $N\in BC$ и $Q\in CD$. Страната AB на успоредника е 8 пъти по-голяма от страната на ромба и $BC=\dfrac{3}{8}AB$. Да се намери лицето на ромба, ако лицето на трапеца $ABNM$ е 171 кв. см.



Решение: Нека правата NM пресича страната AD в точка E, а правата QM пресича страната AB в точка F. Тогава

$$FB=\frac{1}{8}AB,\ AB=8FB,$$

$$AF=AB-FB=8FB-FB=7FB,$$

$BC=\dfrac{3}{8}AB=\dfrac{3}{8}\cdot 8FB=3FB=3NC$, $NC=\dfrac{1}{3}BC$ и $BN=BC-NC=3NC-NC=2NC$. Да означим лицето на $MNCQ$ с S. Тъй като $MNCQ$ и успоредникът $FBNM$ имат обща височина от върха M съответно към страните NC и BN, то $S_{FBNM}=2S$. Аналогично успоредниците $FBNM$ и $AFME$ имат обща височина от върха M съответно към страните FB и AF, откъдето $S_{AFME}=14S$. Като вземем предвид, че диагоналът в успоредника разделя лицето му на две равни части, заключаваме, че $S_{AFM} = 7S$. Оттук $S_{ABNM} = S_{AFM} + S_{FBNM} = 7S + 2S = 9S$. От условието на задачата намираме $9S = 171$, т.е. $S = \frac{171}{9} = 19$ кв. см.

Оценяване: По 2 точки за изразяване лицата на успоредниците $FBNM$ и $AFME$ чрез S. По 1 точка за изразяване лицата на ΔAFM и на трапеца $ABNM$ чрез S. За завършване на решението – 1 точка.

6.2. Празнична торта е направена от три цилиндрични блата с еднаква височина. Най-долният блат има диаметър 50 см, а диаметърът на всеки следващ е с 10 см по-малък от предходния. Тортата е поставена в цилиндрична кутия с диаметър, равен на диаметъра на най-долния блат и височина, която е с 5 см по-голяма от височината на тортата. Намерете височината на тортата, ако тортата заема $\frac{3}{5}$ от обема на кутията .

Решение: Да означим височината на един блат с h см. Тогава цялата торта е висока $3h$ см, а кутията – съответно $(3h+5)$ см. За радиусите на трите блата намираме 25, 20 и 15 см. Като използваме формулата за обем на цилиндър, получаваме

$$\pi\left(15^2 + 20^2 + 25^2\right)h = \frac{3}{5}.\pi.25^2.(3h+5).$$

След опростяване оттук следва, че $10h = 3(3h+5)$ и $h = 15$ см. Следователно тортата е висока 45 см.

Оценяване: 1 точка за намиране радиусите на трите блата; 3 точки за изравняване обемите на тортата и кутията; 2 точки за намиране на неизвестното от съответното уравнение; 1 точка за завършване на решението.

6.3. В държавата Фридландия паричната единица се нарича фрид и се използват три вида монети. Монетата от 1 фрид тежи 6 г, монетата от 2 фрида тежи 12 г, а монетата от 10 фрида тежи 25 г. В централната банка на държавата всеки набор монети може да се замени за друг със същото тегло.

а) Ако имате 2014 фрида в 1030 монети по 1 фрид, 7 монети по 2 фрида и 97 монети по 10 фрида, можете ли с подходящи замени да получите 3449 фрида?

б) Възможно ли е от 2014 фрида (в произволен набор монети) да получите 2901 фрида с помощта на подходящи замени?

Решение: а) За да получим 3449 фрида от 2014 фрида, трябва да постигнем печалба от $3449 - 2014 = 1435$ фрида. Да забележим, че теглото на 25 монети по 1 фрид е 150 г, колкото е теглото на 6 монети по 10 фрида. Така, при замяна на набор монети по 1 фрид със стойност 25 фрида и набор монети по 10 фрида (който е със същото тегло) реализираме печалба от $6.10 - 25.1 = 35$ фрида. Да разгледаме 41 групи от по 25 монети по 1 фрид. От направеното разсъждение следва, че можем да заменим тези групи с 41 групи от по 6 монети по 10 фрида. По този начин ще се реализира исканата печалба $41.35 = 1435$ фрида. При това се ползват $41.25 = 1025$ от наличните 1030 монети по 1 фрид.

б) Нека имаме a монети по 1 фрид, b монети по 2 фрида и c монети по 10 фрида. Тогава стойността на монетите е $N = 1.a + 2.b + 10.c$ фрида, а теглото им е

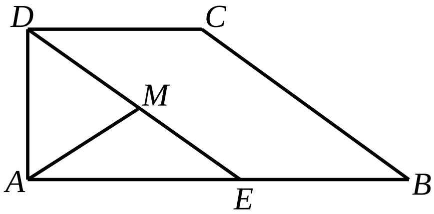
$$M = 6.a + 12.b + 25.c = (a + 2.b + 10.c) + (5.a + 10.b + 15c) \text{ грама.}$$

Двете числа M и N имат един и същ остатък при деление на 5. От друга страна числото 2014 има остатък 4, а числото 2901 има остатък 1 при деление на 5. Следователно замяната не може да се извърши.

Оценяване: а) 2 точки за установяване, че при замяна на 25 фрида в монети по 1 фрид с 6 монети по 10 фрида се реализира печалба от 35 фрида (същият брой точки се присъждат при установяване на еквивалентна зависимост); 2 точки за показване как се получава желаната печалба.

б) 2 точки за откриване на инварианта (или негов еквивалент) и 1 точка за прилагането му.

7.1. Даден е трапец *ABCD*, в който сборът от ъглите, прилежащи на по-голямата основа AB, е равен на 120^0. Да се намерят ъглите на трапеца, ако $BC = 2AD$.



Решение: Нека правата през *D*, която е успоредна на *BC*, пресича *AB* в точка *E*. Тогава $\angle AED = \angle ABC$ (съответни). От условието в задачата намираме, че $\angle DAE + \angle AED = 120^0$. Оттук получаваме, че $\angle ADE = 60^0$. Нека *M* е средата на отсечката *DE*.

Получаваме, че $DM = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}BC = AD$. Това означава, че ΔAMD е равнобедрен, а следователно и равностранен, след като ъгълът при върха му е 60^0. В частност $AM = DM = EM$, т.е. ΔAEM е равнобедрен. Сега $60^0 = \angle AMD = \angle MAE + \angle AEM$ (външен) $= 2\angle AEM$. Така $\angle ABC = \angle AEM = 30^0$. Освен това

$$\angle BAD = \angle DAM + \angle EAM = 60^0 + 30^0 = 90^0.$$

Окончателно ъглите на трапеца са 90^0, 30^0, 150^0 и 90^0.

Оценяване: За доказване, че ΔAMD е равностранен – 4 точки (от които 3 точки, че е равнобедрен и 1 точка за $\angle ADE = 60^0$). За $\angle AEM = 30^0$ 1 точка, за $\angle BAD = 90^0$ 1 точка и 1 точка за останалите ъгли.

7.2. Да се намерят целите решения на уравнението $10xy + 16x + 5y = 2006$.

Решение: След прибавяне на 8 към двете страни на уравнението можем да разложим лявата страна на множители и да получим $(5y+8).(2x+1) = 2014$. Тъй като $2014 = 2.19.53$ и когато x е цяло число, $2x+1$ е нечетно, са възможни следните случаи:

1. $2x+1=1,\ 5y+8=2014$
2. $2x+1=-1,\ 5y+8=-2014$
3. $2x+1=19,\ 5y+8=106$
4. $2x+1=-19,\ 5y+8=-106$
5. $2x+1=53,\ 5y+8=38$
6. $2x+1=-53,\ 5y+8=-38$
7. $2x+1=1007,\ 5y+8=2$
8. $2x+1=-1007,\ 5y+8=-2$

В случай 5. получаваме $x = 26, y = 6$, в случай 8. получаваме $x = -504, y = -2$, а останалите случаи нямат решения в цели числа.

Оценяване: 3 точки за разлагането $(5y+8).(2x+1) = 2014$; 4 точки за решаване на диофантовото уравнение (по 0,5 точки за пълно обосноваване на всеки от осемте случая, което включва проверка дали получените стойности са решение или не); 0,5 точки за отгатнат верен отговор, като тези точки не се добавят към предишните.

7.3. Нека $A = 3.2^{2013}$. Да се докаже, че съществува:

а) представяне на *A* в сума от последователни естествени числа (поне две);

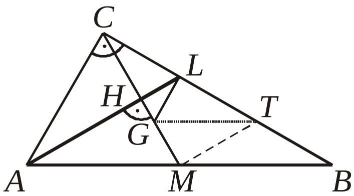
б) единствено представяне на A в сума от последователни естествени числа (поне две).

Решение: а) $A=\left(2^{2013}-1\right)+2^{2013}+\left(2^{2013}+1\right)$.

б) Да разгледаме уравнението $A=a+(a+1)+...+(a+n-1)$, $n\geq 2$. Задачата се свежда да докажем, че това уравнение има единствено решение в естествени числа a и n. Имаме $2A=2.3.2^{2013}=2\left(na+\dfrac{n(n-1)}{2}\right)=n(2a+(n-1))$, т.е. $3.2^{2014}=n(2a+(n-1))$. Ако n е четно, то числото $2a+(n-1)$ е нечетно и от последното равенство следва, че $2a+(n-1)=1$ или $2a+(n-1)=3$. Първата възможност отпада непосредствено, поради $n\geq 2$. Втората възможност може да се реализира единствено при $n=2$ и $a=1$. Но тогава $A=1+2=3$, което е невъзможно. Заключаваме, че n е нечетно и следователно $n=3$. Сега $2^{2014}=2a+2$, откъдето $a=2^{2013}-1$. Получаваме отново, че $A=\left(2^{2013}-1\right)+2^{2013}+\left(2^{2013}+1\right)$, но от доказателството следва, че това представяне е единствено.

Оценяване: 2 точки за а) и 5 точки за б), от които 1 точка за представянето $A=na+\dfrac{n(n-1)}{2}$, за свеждане на задачата до диофантовото уравнение $3.2^{2014}=n(2a+(n-1))$ 1 точка, за доказване, че n е нечетно – 2 точки, за завършване на задачата – 1 точка.

8.1. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза $AB=2a$ и медицентър G. Ако ъглополовящата AL $(L\in BC)$ е перпендикулярна на медианата CM $(M\in AB)$, намерете дължината на отсечката LG.



Решение: Нека $H=CM\cap AL$. В ΔAMC, в който $CM=AM$, AH е ъглополовяща и височина. Следователно $AC=AM$ и ΔAMC е равностранен. В ΔABC получаваме $\angle CAB=60^\circ$ и $\angle CBA=30^\circ$. Построяваме $MT \parallel AL,\ T\in BC$. Тъй като M е средата на AB, то T е средата на BL. Но H е средата на CM и $HL \parallel MT$. Следователно $CL=LT=TB$ и MT е средна отсечка в ΔABL. Тогава $\angle TMB=\angle LAB=30^\circ=\angle ABC$. Разглеждаме $\overrightarrow{GT}=\overrightarrow{CT}-\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$ и получаваме, че $GT \parallel MB$. Оттук $\angle GTL=\angle MBT=30^\circ$. Но $\angle MTC=60^\circ$ като външен за ΔMBT и следователно $\Delta GTM\cong\Delta GTL$ (I признак). Така $LG=GM$. Но тъй като G е медицентър на ΔABC, то $GM=\frac{1}{3}CM=\frac{a}{3}$. Окончателно получаваме, че $LG=\frac{a}{3}$.

Оценяване: За доказване, че ΔAMC е равностранен – 1 точка; 1 точка за $MT \parallel AL,\ T\in BC$; 1 точка, че MT е средна отсечка в ΔABL; 2 точки за $GT \parallel MB$; 1 точка за $LG=GM$ и 1 точка за завършване на решението.

8.2. Ако m и n са естествени числа, за които $|m-1|+|m-2|+...+|m-2015|=n(n+1)$, да се пресметне $m+n$.

Решение: Да обърнем внимание, че при фиксирано n съществува най-много едно m, за което е изпълнено равенството от условието на задачата. Нека m удовлетворява равенството при фиксирано n. Сега е ясно, че числото $2016-m$ също го удовлетворява. От единствеността следва, че $m=2016-m$, откъдето $m=1008$. Тогава равенството става

$$1007+1006+...+1+0+1+...1007=n(n+1),$$

т.е. $2(1+2+...+1007)=n(n+1)$. Оттук $1007.1008=n(n+1)$. Получаваме $n=1007$ и $m+n=2015$.

Оценяване: За съобразяване, че при фиксирано n съществува най-много едно m, което е удовлетворява равенството, 2 точки. За съобразяване, че $2016-m$ е решение в случай, че m е решение, 3 точки. За завършване на решението – 2 точки.

8.3. Намерете всички двойки цели числа x и y, за които $x^2+4y^2=2014y$.

Решение: Нека (x,y) е решение. Тъй като $2014=2.19.53$, то 19 дели лявата страна на уравнението. Оттук следва, че 19 дели поотделено x и y. Този факт може да се съобрази с помощта на таблицата по-долу, в която с използване на означенията $a=x$ и $b=2y$ са разгледани всевъзможните остатъци на a и b при деление на 19.

a,b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a^2	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	17	6	16	9	4	1
b^2	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	17	6	16	9	4	1

С непосредствена проверка от таблицата следва, че при комбиниране на числата от втория и третия ред само в случая, когато a и b се делят едновременно на 19, е възможно a^2+b^2 да се дели на 19. По-нататък забелязваме, че x трябва да е четно, откъдето заключаваме, че дясната страна на уравнението се дели на 4. Това означава, че и y е четно. Имаме:

$$x=2.19.x_1 \text{ и } y=2.19.y_1 \Rightarrow x_1^2+4y_1^2=53.y_1 \Rightarrow x_1^2=y_1.(53-4y_1).$$

Полученото диофантово уравнение може да се реши, като даваме последователно стойности $y_1=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ и 13. Оттук $x_1=\pm 7$ и $y_1=1$ или $x_1=0$ и $y_1=0$. Лесно проверяваме, че решенията (x,y) са (0; 0), (266; 38) и (– 266; 38).

Оценяване: 3 точки за обосновка, че x и y поотделно се делят на 19; за четност на x и y – 1 точка; за всяко открито решение без тривиалното – по 1 точка (общо 2 точки); за доказване, че решенията са само три – 1 точка.

Забележка. Известен е следният факт от теорията на числата: Ако простото число $p=4k+3$ дели a^2+b^2, то a и b се делят едновременно на p. Който е взел предвид, че $19=4.4+3$ и е използвал този факт (дори и без доказателство), получава 3 точки.

Задачите са предложени, както следва:

4.1. – Ивайло Старибратов и Ивайло Кортезоз, 4.2. – Ивайло Кортезов, 4.3. – Ивайло Старибратов;

5.1. – Емил Карлов, Иван Ангелов, Ивайло Кортезов;

6.1. – Стоян Ненков, 6.2. – Ирина Шаркова, 6.3. – Мариана Кьосева;

7.1. – Веселин Ненков и Сава Гроздев, 7.2. – Мариана Кьосева, 7.3. – Веселин Ненков и Сава Гроздев;

8.1. – Мариана Кьосева, 8.2. – Веселин Ненков и Сава Гроздев, 8.3. – Иван Ангелов.