



## МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ

5 КЛАС

ПОЛУФИНАЛ 2021

**Задача 1.** Да се пресметне  $x$ , ако

$$\frac{1 + 2 \times 4 + 4 \times 8 + 8 \times 16}{1 \times 2 + 4 \times 4 + 8 \times 8 + 16 \times 16} = \frac{1}{x}$$

**Задача 2.** Колко са целите числа от 11 до 17, които имат нечетен брой делители?

**Задача 3.** Пресметнете  $2\frac{1}{4} - (0,0025: 50 + 1,99995)$ .

**Задача 4.** Пресметнете сбора на делителите на 143.

**Задача 5.** Записах правилните дроби със знаменател 33. Колко са записаните цифри 3?

**Задача 6.** Сборът на две прости числа е двуцифрено нечетно число, по-малко от 16. Колко е произведението на тези числа?

**Задача 7.** Един търговец закупил стока от борсата и определил цена, на която възнамерявал да я продаде в собствения си магазин, за да реализира 20% печалба. По-късно той намалил цената с 5% и продал стоката при новата цена. Колко процента е реализираната печалба?

**Задача 8.** Иван записал всички четни числа от 1 до 201 включително. От записаните числа Петър изтрил тези, които се делят и на 5, и на 9. Колко числа са останали неизтрити?

**Задача 9.** С колко най-малко знака „+“, поставени вляво на записа, ще получим вярно числово равенство?

$$\underbrace{222\dots2}_{30 \text{ цифри } 2} = 2022$$

**Задача 10.** Колко са правилните несъкратими дроби със знаменател 24?

**Задача 11.** Правоъгълник със страни 36 см и 54 см е разрязан на еднакви квадрати със страни цели числа сантиметри. Колко е най-малкият им брой?

**Задача 12.** Диагоналите  $AC$  и  $BD$  на един четириъгълник  $ABCD$  са взаимно перпендикулярни и имат дължини съответно 6 см и 8 см. Ако диагоналът  $AC$  разполовява диагонала  $BD$ , пресметнете лицето на четириъгълника  $ABCD$  в квадратни сантиметри.

**Задача 13.** Сборът от дължините на всички ръбове на правоъгълен паралелепипед е 24 см. Дължината на един от тях е с 1 см по-голяма от дължината на друг и с 2 см по-голяма от дължината на трети. Колко кубични сантиметра е обемът на този правоъгълен паралелепипед?

**Задача 14.** Лицата на два квадрата са съответно 121 кв. см и 196 кв. см. Страната на единият квадрат е увеличена с 2 см, а страната на другия е намалена с  $x$  см. Пресметнете  $x$ , ако е известно, че двата новополучени квадрата са равнолицеви.

**Задача 15.** Равнобедрените триъгълници с дължини цели числа сантиметри и с обиколка 20 см са четири. Колко сантиметра е най-малкото бедро?

(С три отсечки може да се построи триъгълник, ако сборът на дължините на всеки две от тях е по-голям от дължината на третата.)

**Задача 16.** Колко е броят на всички трицифрени числа, за които при изтриване само на първата цифра се получава точен квадрат, а при изтриване само на последната цифра се получава просто число.

(Точни квадрати са тези числа, които се представят като произведение от две равни естествени числа.)

**Задача 17.** С колко цифри се записва най-малкото естествено число, което се записва само с цифрите 0 и 1, и което се дели на 72?

**Задача 18.** Разпределете естествените числа от 1 до 9 в групи (поне две), така че сборът от числата във всяка група да е еднакъв. Колко са възможните сборове?

**Задача 19.** В един клас  $\frac{2}{7}$  от момичетата могат да плуват, а  $\frac{1}{9}$  от децата, които могат да плуват, са момичета. Ако 10 момичета не могат да плуват, колко са момчетата, които умеят да плуват?

**Задача 20.** Коя е несъкратимата обикновена дроб, която да е равна на  $\frac{1665}{3285}$  ?

задача	отговор	Решение
1	2	$\frac{1 + 2 \times 4 + 4 \times 8 + 8 \times 16}{1 \times 2 + 4 \times 4 + 8 \times 8 + 16 \times 16} = \frac{1 + 2 \times 4 + 4 \times 8 + 8 \times 16}{2 \times (1 + 2 \times 4 + 4 \times 8 + 8 \times 16)} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow x = 2.$
2	1	Само числото 16 има нечетен брой делители. Броят е 1.
3	$\frac{1}{4}$	$0.0025 \div 50 + 1.99995 = 0.00005 + 1.99995 = 2$ $\Rightarrow 2\frac{1}{4} - (0,0025: 50 + 1,99995) = \frac{1}{4}$
4	168	$143 = 11 \cdot 13 \Rightarrow$ търсеният сбор е $1 + 11 + 13 + 143 = 168$ .
5	70 или 72	<p>Записваме:</p> $\frac{1}{33}, \frac{2}{33}, \frac{3}{33}, \dots, \frac{32}{33}$ <p>За записване на числителите са използвани 6 цифри 3: в 3, 13, 23, 30, 31 и 32, а за знаменателите – <math>32 \cdot 2 = 64</math>.</p> <p>Общо <math>64 + 6 = 70</math> цифри 3.</p> <p>Ако към правилните дроби причислим дроб с числител 0 и знаменател 33, тогава броят на цифрите 3 ще е 72.</p>
6	22 или 26	<p>Сборът на две прости числа е нечетно, когато едното е 2.</p> <p>Тогава възможните сборове са 5, 7, 9, 13, 15, 19, ...</p> <p>По-малки от 16 са 13 и 15.</p> <p><math>13 = 2 + 11 \Rightarrow</math> произведението е 22</p> <p><math>15 = 2 + 13 \Rightarrow</math> произведението е 26</p>
7	14	<p>Нека за определеност цената на стоката на борсата да е 100 лева.</p> <p>Първоначалната цена е била <math>100 + 20\% \text{ от } 100 = 120</math>.</p> <p>След това обаче стоката е намалена и цената ѝ вече е <math>120 - 5\% \text{ от } 120 = 114</math>. Тогава реализираната печалба е 14 лева при цена на стоката 100 лева – т.е печалбата е 14 %.</p>
8	98	<p>Числата, които се делят и на 5, и на 9 са четири: 45, 90, 135 и 180. Четни сред тях са 90 и 180.</p> <p>Неизтрите числа са <math>100 - 2 = 98</math>.</p>
9	10	$\underbrace{222 + 222 + \dots + 222}_{9 \text{ събираеми}} + 22 + 2 = 2022$ <p>Общо събираемите са 11, а използваните плюсове са 10.</p>

10	8	Числата, които са взаимнопрости с 24 и са по-малки от 24 са 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и 23. Броят им е 8.
11	6	Най-голямото цяло число, което дели и 36, и 54 е 18. Тогава броят на квадратите ще е $(36:18) \cdot (54:18) = 2 \cdot 3 = 6$ .
12	24	Лицето на четириъгълника е равно на сбора от лицата на триъгълниците $ACD$ и $ABD$ . Височините на тези триъгълници към общата им страна $AC$ са по 4 см. Тогава лицата им са равни на 12 кв. см. Лицето на четириъгълника е 24 кв. см.
13	6	Сборът на трите различни ръба е 24 см : 4 = 6 см. От $6 = 1 + 2 + 3$ , следва че ръбовете имат дължини 1 см, 2 см и 3 см, а обемът му е 6 кубически сантиметра.
14	5	Трябва да получим квадрати със страна 9 см. Страната на другия квадрат е била 14 см, трябва да я намалим с 5 см, за да получим квадрат с лице $81 \text{ см}^2$ .
15	6	Възможностите са: (9; 9; 2), (8; 8; 4), (7; 7; 6), (6; 6; 8). Търсената стойност е 6 см.
16	11	Едноцифрените и двуцифрени точни квадрати са 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 и 81. Тогава търсените трицифрени числа са от вида *00, *01, *04, *09, *16, *25, *36, *49, *64, *81. Ако в тях зачеркнем последната цифра ще получим двуцифрените числа *0, *0, *0, *0, *1, *2, *3, *4, *6, *8. Но числата завършващи на 0, 2, 4, 6 или 8, са съставни, а ние търсим прости числа. Затова разглеждаме само числата *1 и *3 и съответстващите на тях трицифрени числа *16, *36. Прости са числата 11, 31, 41, 61, 71, 13, 23, 43, 53, 73, 83. Така достигаме до търсените числа 116, 136, 316, 416, 616, 716, 236, 436, 536, 736, 836. Броят им е 11.
17	12	Числото трябва да се дели и на 9, и на 8. За да се дели на 8, то трябва да завършва на три нули, а броят на единиците трябва да е кратен на 9. Търсим най-малкото такова число и то е 111111111000. То се записва с 12 цифри.
18	2	Сборът на естествените числа от 1 до 9 е $1 + 2 + \dots + 8 + 9 = 45$ . Тогава броят на групите е делител на числото 45. Числото 9 влиза в една от групите, така че сборът на числата във всяка група е не по-малко от 9. Това води до:

		<p><b>Три групи</b> със сбор на числата във всяка от тях 15. Пример: {8; 7}, {9, 6} и {1; 2; 3; 4; 5}.</p> <p><b>5 групи</b> – със сбор на числата във всяка от тях 9. Пример: {9}, {8; 1}, {7; 2}, {6; 3}, {5; 4}.</p>
<b>19</b>	<b>32</b>	<p>Момчетата, които не могат да плуват са 10 и този брой е <math>\frac{5}{7}</math> от всички момичета. Получаваме, че момчетата са 14. От тях само 4 плуват.</p> <p><math>\frac{1}{9}</math> от всички плувци са 4, тогава децата които умеят да плуват са 36. От тях <math>36 - 4 = 32</math> са момчета.</p>
<b>20</b>	<b><math>\frac{37}{73}</math></b>	<p><math>3285 = 1665 \times 1 + 1620;</math>  <math>1665 = 1620 \times 1 + 45;</math>  <math>1620 = 45 \times 36 + 0;</math>  Извод:(1665;3285)=45.  От <math>1665 : 45 = 37</math> и <math>3285 : 45 = 73</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{1665}{3285} = \frac{37}{73}</math></p>