



МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ

6 КЛАС

ПОЛУФИНАЛ 2021

Задача 1. Пресметнете

$$\underbrace{(-1) \times (-1)^2 \times \dots \times (-1)^{29} \times (-1)^{30}}_{30}$$

Задача 2. Пресметнете $|\pi - 2| + |2\pi - 3| + |3\pi - 1| - 4\pi$. (Упътване: $\pi \approx 3,14$)

Задача 3. Пресметнете $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - 15 + 17 - 19 + 21 - 23$.

Задача 4. Колко са естествените числа, които делят с остатък 0 числото, равно на $2^3 \times 6^2$?

Задача 5. На картички са написани естествените числа от 1 до 15 включително, по едно число на картичка. Запишете с десетична дроб вероятността при случайно избрана картичка тя да е просто число.

Задача 6. Височините на триъгълник с обиколка 18 сантиметра се отнасят, както

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$$

Колко сантиметра е най-голямата страна на този триъгълник?

Задача 7. Един търговец закупил стока от борсата и определил цена, на която възнамерявал да я продаде в собствения си магазин, за да реализира 20 % печалба. По-късно той намалил цената с 10% и продал стоката при новата цена. Колко процента е реализираната печалба?

Задача 8. Иван записал всички естествени числа от 1 до 200 включително. От записаните числа Петър изтрил тези, които се делят на 2 и на 3. Колко числа са останали неизтрити?

Задача 9. Преместете една цифра, така че да получите най-голямото възможно число.

$$13 + 11$$

Кое е това число?

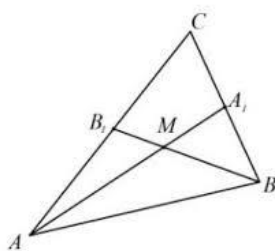
Задача 10. Ако $a:b = 2:3$, пресметнете $\left| \frac{a-3b}{2a+b} \right|$

Задача 11. Нека x е естествено число. Обиколката на правоъгълник в сантиметри е $8x + 12$, а широчината му в сантиметри е x . С колко сантиметра дължината е по-голяма от широчината?

Задача 12. Сборът от всички ръбове на правоъгълен паралелепипед е 108 см. Дължината му е с 2 см по-голяма от широчината му и с 4 см по-голяма от височината. Пресметнете обема на този паралелепипед.

Задача 13. Пресметнете лицето на триъгълник, ако координатите на върховете му са $(-1;0)$, $(3;0)$ и $(0; -4)$.

Задача 14. Точките A_1 и B_1 са среди съответно на страните BC и AB на $\triangle ABC$. Правите AA_1 и BB_1 разделят триъгълника на 3 триъгълника и един четириъгълник MA_1CB_1 с лице 8 кв. см. Пресметнете лицето на $\triangle ABC$.



Задача 15. Тяло е образувано от пирамида и призма с обща основа. Ако върховете на това тяло са 33, пресметнете броя на ръбовете му.

Задача 16. Извор, чийто дебит е 80 литра в минута, водоснабдява две чешми. В едната достига 4 пъти по-голямо количество, отколкото в другата. Колко литра е дебитът на тази, която получава по-голямо количество вода?

Задача 17. Ако a и \overline{bc} са съответно едноцифрено и двуцифрено число, такива че

$$25 \cdot a = 6 \cdot \overline{bc},$$

пресметнете $a + b + c$.

Задача 18. В един клас $\frac{2}{7}$ от момчетата могат да плуват, а $\frac{1}{9}$ от децата, които могат да плуват, са момичета. Ако 10 момичета не могат да плуват, колко са момчетата, които умеят да плуват?

Задача 19. Намерете x , ако

$$\frac{13}{17} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}}$$

Задача 20. Сборът на 49 естествени числа е равен на 999. Коя е най-голямата възможна стойност на техния най-голям общ делител?

AGE GROUP 6

Problem	Answer	Solution
1	-1	
2	$2\pi - 6$	$ \pi - 2 + 2\pi - 3 + 3\pi - 1 - 4\pi = \pi - 2 + 2\pi - 3 + 3\pi - 1 - 4\pi = 2\pi - 6$
3	-12	$(1 - 3) + (5 - 7) + (9 - 11) + (13 - 15) + (17 - 19) + (21 - 23) = -12$
4	18	$2^3 \times 6^2 = 2^5 \times 6^2 \Rightarrow (5 + 1)(2 + 1) = 18$ е броят на естествените числа, делителите на това число.
5	0,4	Броят на благоприятните изходи са 2, 3, 5, 7, 11, 13. Броят на всички изходи е 15. Тогава вероятността е $\frac{6}{15} = 0,4$.
6	8	$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} \Rightarrow h_a : h_b : h_c = 6 : 4 : 3 \Rightarrow h_a = 6k; h_b = 4k; h_c = 3k$ $\Rightarrow \frac{6ka}{2} = \frac{4kb}{2} = \frac{3kc}{2} \Rightarrow 6ka = 4kb = 3kc \Rightarrow 6a = 4b = 3c \Rightarrow a = \frac{3}{6}c,$ $b = \frac{3}{4}c$ $\Rightarrow a + b + c = \begin{cases} 3 \\ 6 \end{cases}c + \frac{3}{4}c + c = \frac{9}{4}c \Rightarrow c = 8$
7	8	Нека за определеност цената на стоката на борсата да е 100 лева. Първоначалната цена е била $100 + 20\%$ от $100 = 120$. След това обаче стоката е намалена и цената ѝ вече е $120 - 10\%$ от $120 = 108$. Тогава реализираната печалба е 8 лева при цена на стоката 100 лева – т.е печалбата е 8 %.
8	67	Числата, които се делят на 2 са 100, а числата, които се делят на 3 са 66. Сред тях обаче има такива, които се делят и на 2, и на 3 - това са всички числа, които се делят на 6 – броят им е 33. Неизтрите числа са $200 - (100 + 66 - 33) = 67$.
9	1332	$13 + 11 \Rightarrow 1 + 11^3 = 1332$
10	1	$a:b=2:3 \Rightarrow a = 2k, b = 3k \Rightarrow \left \frac{a-3b}{2a+b} \right = \left \frac{2k-9k}{4k+3k} \right = 1$
11	$2x + 6$	Сборът на дължината и широчината е $4x + 6$. Тогава дължината е $3x + 6$. Тя е по-голяма от широчината с $3x + 6 - x = 2x + 6$.
12	693	Сборът на дължината, широчината и височината е $108 \text{ cm} : 4 = 27$. Нека x е дължината му. Тогава широчината и височината са съответно $x - 2, x - 4$.

		<p>Получаваме:</p> $x + x - 2 + x - 4 = 3x - 6 \Rightarrow 3x - 6 = 27 \Rightarrow x = 11 \Rightarrow$ $V = 11 \cdot 9 \cdot 7 = 693 \text{ cm}^2$
13	8	$S = \frac{1}{2} \times 3 - (-1) \times -4 = 8$
14	24	$S_{CMB_1} = S_{AMB_1} = x;$ $S_{CMA_1} = S_{BMA_1} = y;$ $S_{CAA_1} = \frac{1}{2} S_{ABC} = S_{BCB_1} \Rightarrow S_{AMB_1} = S_{BMA_1} \Rightarrow x = y \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S_{ABC}$ $= 24 \text{ cm}^2$
15	48	<p>Ако основата е x- ъгълник, тогава върховете са $1 + x + x \Rightarrow 1 + 2x = 33 \Rightarrow x = 16$</p> <p>$\Rightarrow$ ръбовете му са $16 + 2 \cdot 16 = 48$.</p>
16	64	$80:5 = 16, 16 \cdot 4 = 64$
17	13	$a = 6, \overline{bc} = 25 \Rightarrow a + b + c = 13$
18	32	<p>Момичетата, които не могат да плуват са 10 и този брой е $\frac{5}{7}$ от всички момичета. Получаваме, че момичетата са 14. От тях само 4 плуват.</p> <p>$\frac{1}{9}$ от всички плувци са 4, тогава децата които умеят да плуват са 36.</p> <p>От тях $36 - 4 = 32$ са момчета.</p>
19	4	$\frac{13}{17} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} \Rightarrow x = 4$
20	9	<p>Нека d е делител на всяко от 49- те числа. Тогава d дели и техния сбор, т.е. d дели 999. От $999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$, следва че възможните стойности на d са осем: 1, 3, 9, 27, 37, 111, 333 и 999.</p> <p>Ако $d \geq 27 \Rightarrow 27 \times 49 > 999 \Rightarrow d = 1, 3, 9$.</p> <p>Най-голямата стойност на d е 9.</p> <p>Трябва да посочим пример:</p> $9 + 9 + \dots + 9 + 567 = 999.$