



ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 67-ТА НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

16.12.2017 г.

ТЕМА VII КЛАС

Зад.1

1.1. Извършете действията и приведете в нормален вид:

$$(-1 - x)^2 - 2(2x + 1)(1 - 2x) - \frac{1}{2}(4x + 6)$$

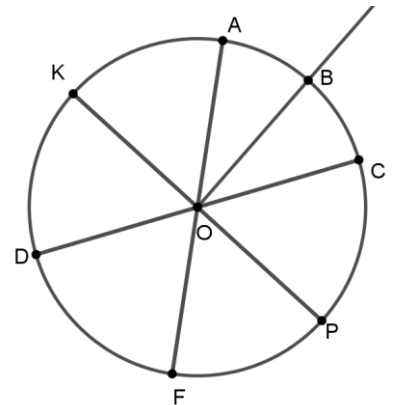
1.2. Докажете тъждеството: $x(x + 3)(x - 3) - (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 1 = 9(1 - x)$ 1.3. Разложете на множители рационалните изрази: $A = x^2 + 2x + 1 - 9y^2$ и

$$C = (ab + bc + ac)(a + b + c) - abc$$

1.4. Даден е израз: $\frac{|x+1|}{-2} - 2|-x - 1| + \frac{1}{2}|1 + x|$. Пресметнете числената му стойност за $x = -\frac{1}{2}$.

7 точки

Зад.2 Точките A, C, P, F, D и K лежат на една окръжност и са такива, че AF, DC и KP са диаметри, а точките D и K разделят полуокръжността на три равни части. Лъчът $OB \rightarrow$ е ъглополовяща на $\sphericalangle AOC$. Попълнете таблицата като запишете в дясната колона на таблицата фигура, числов израз или отношение, които отговарят на условието вляво.



7 точки

№	Условие	Фигура / числов израз / отношение
1.	Противоположният ъгъл на $\sphericalangle COP$ е:	
2.	Градусната мярка на $\sphericalangle DOF$ е:	
3.	Отношението на градусната мярка на $\sphericalangle DOA$ към градусната мярка на $\sphericalangle AOC$ е:	
4.	Градусната мярка на $\sphericalangle BOP$ е:	
5.	Съседният ъгъл на $\sphericalangle BOA$ е:	
6.	Ако отсечката $KP=8$ см, дължината на окръжността е:	
7.	Посочете поне един тъпоъгълен, равнобедрен триъгълник, върховете на който са точки от окръжността	

Зад.3 В $\triangle ABC$ точката D е вътрешна за отсечката AB , а точката K лежи на лъча $AC \rightarrow$ така, че C е между A и K , като $\sphericalangle BCK = \sphericalangle DCA$.

А) Да се докаже, че $\sphericalangle ACB$ е тъп.Б) През точка D е построена права, успоредна на BC и пресичаща AC в точка M . Да се докаже, че ако $2\sphericalangle CAB + 3\sphericalangle CBA = 180^\circ$, то BM е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$.

7 точки

Време за работа - 4 часа. Всяка задача се оценява със 7 точки.**До областен кръг се допускат ученици с най-малко 16 точки.****Желаем Ви успех!**

Указание

**ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 67-ТА НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
16.12.2017 г.
ТЕМА VII КЛАС**

Зад.1

1.1. $(-1 - x)^2 - 2(2x + 1)(1 - 2x) - \frac{1}{2}(4x + 6) = 9x^2 - 4$ (1 точка).

1.2. $x(x + 3)(x - 3) - (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 1 = x(x^2 - 9) - (x^3 - 8) + 1 = 9 - 9x$
 $9 - 9x = 9(1 - x) \Rightarrow$ равенството е тъждество (2 точки).

1.3. $A = x^2 + 2x + 1 - 9y^2 = (x + 1)^2 - (3y)^2 = (x + 1 - 3y)(x + 1 + 3y)$ (1 точка)

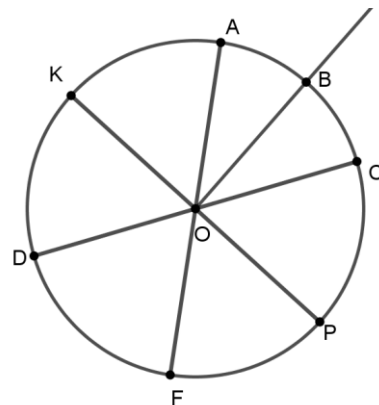
$C = (ab + bc + ac)(a + b + c) - abc = (a + c)(a + b)(b + c)$ (1 точка).

1.4. За вярно опростяване на израза $\frac{|x+1|}{-2} - 2|-x - 1| + \frac{1}{2}|1 + x| = -2|x + 1|$ (1 точка), за вярно пресметната числена стойност -1 (1 точка).

Забележка: За правилно пресмятане на числената стойност без да е извършено опростяване на израза ученикът получава **2 точки**.

Зад.2

№	Условие	Фигура / числов израз / отношение
1.	Противоположният ъгъл на $\sphericalangle COP$ е:	$\sphericalangle DOK$
2.	Градусната мярка на $\sphericalangle DOF$ е:	60°
3.	Отношението на градусната мярка на $\sphericalangle DOA$ към градусната мярка на $\sphericalangle AOC$ е:	2:1
4.	Градусната мярка на $\sphericalangle BOP$ е:	90°
5.	Съседният ъгъл на $\sphericalangle BOA$ е:	$\sphericalangle FOB$
6.	Ако отсечката $KP=8$ см, дължината на окръжността е:	8π см ² или 25,12 см ²
7.	Посочете поне един тъпоъгълен, равнобедрен триъгълник, върховете на който са точки от окръжността	$\triangle KFD$ или $\triangle KAD$ или $\triangle PFD$ или $\triangle PFC$ или $\triangle PAC$



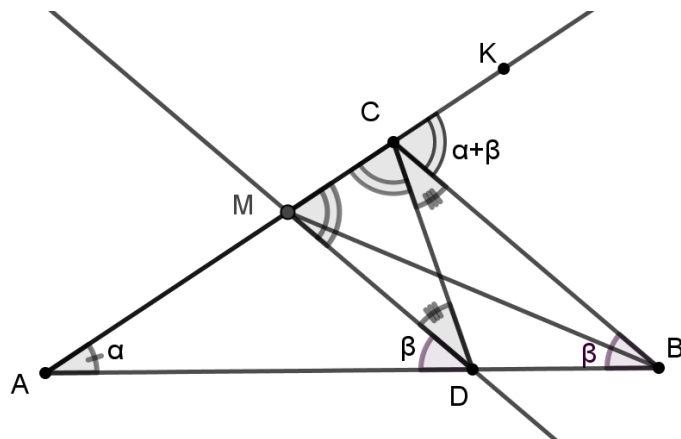
За всеки правилен отговор по **1 точка**

7 точки максимум

Зад.3

За правилен и достоверен чертеж (т. D – вътрешна, т. K – външна и принадлежаща на AC и права $DM \parallel BC$) (1 точка)

От условието, че $\sphericalangle ACB = \alpha + \beta + \sphericalangle DCB$



$\Rightarrow \sphericalangle ACB > \sphericalangle BCK$, но те са съседни ъгли, $\sphericalangle ACB > 90^\circ$ (1 точка)

От условията, че $2\alpha + 3\beta = 180^\circ$; $\sphericalangle ACK = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB + \sphericalangle BCK = 180^\circ$ (изправен ъгъл) и $\sphericalangle BCK = \sphericalangle DCM = \alpha + \beta$ ($\sphericalangle BCK$ външен ъгъл за $\triangle ABC$) $\Rightarrow \sphericalangle BCD = \beta$ (1 точка)

$\Rightarrow \triangle BDC$ е равнобедрен и $BD = CD$ (1)

$\sphericalangle CMD = \alpha + \beta$ ($\sphericalangle DMC$ външен за $\triangle ADM$) (1 точка) $\Rightarrow \triangle DMC$ е равнобедрен и $DM = DC$ (2) (1 точка). От (1) и (2) $\Rightarrow BD = CD = MD \Rightarrow \sphericalangle DMB = \sphericalangle DBM$, но $\sphericalangle DMB = \sphericalangle MBC$ (кръстни ъгли) (1 точка) $\Rightarrow \sphericalangle DBM = \sphericalangle MBC$, откъдето следва, че BM е ъглополовяща за $\sphericalangle DBC$ (1 точка)